



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

INTRODUCCIÓ A LES ONES GRAVITACIONALS

Sergi Masot Lima

Director: Dr. Ignasi Mundet

Realitzat a: Departament de Matemàtiques
i Informàtica

Barcelona, 18 de gener de 2019

Abstract

While the phenomenon of gravitational waves is an area of research that already has the attention of the general public, the theory of general relativity in which they are framed contains many mathematical intricacies that can be a barrier for the uninitiated. In this work we discuss the necessary ingredients to take the reader with a basic notion of differentiable manifolds and tensor calculus all the way to the equations that explain how the detection with LIGO was achieved, together with the appropriate indications for the most curious to expand their knowledge on the subjects we present.

Resum

Malgrat el fenomen de les ones gravitacionals ja és una àrea de recerca de domini públic, la teoria de la relativitat general que les fonamenta conté conceptes matemàtics que poden resultar un obstacle per als no iniciats. En aquest treball exposarem els ingredients necessaris per portar el lector amb coneixements bàsics de varietats diferenciables i càlcul tensorial pas a pas fins a les equacions que expliquen com es va realitzar la detecció del LIGO, a més d'indicar on els més curiosos poden aprofundir en els conceptes que tractarem.

Agraïments

Vull agrair a l'Ignasi Mundet el seu paper com a tutor. Ha estat una ajuda constant i m'ha guiat des del primer moment, en què vam començar a buscar un tema que em permetés gaudir de tot el que té per oferir la geometria diferencial i la relativitat general.

També donar gràcies a la Maria Jesús Carro, sense qui no hauria pogut incorporar una branca analítica al treball que ha enriquit en gran mesura tant les mires del treball com el meu aprenentatge durant el seu desenvolupament.

Finalment, per suposat, a la meva família, parella i companys, que han estat en tot moment al meu costat i m'han donat forces per completar aquest treball que culmina una etapa.

Índex

Introducció	1
1 Geometria diferencial	3
1.1 Varietats de Lorentz	3
1.2 Connexions i derivades covariants	4
1.3 Transport paral·lel i geodèsiques	7
1.4 Curvatura: tensor de Riemann	8
1.5 Altres definicions	9
2 L'equació de gravitació	10
2.1 Càlcul variacional	10
2.2 Equació d'Einstein	12
2.3 Relativitat General	17
3 Ones gravitatòries	20
3.1 Linealització de l'equació d'Einstein	20
3.2 Tria d'una referència o gauge	28
3.3 Solucions a l'equació linearitzada	32
3.4 Polarització de les ones	41
3.5 Formació d'ones gravitacionals	42
4 Detecció d'ones gravitatòries	43
4.1 Posició relativa d'observadors en caiguda lliure	43
4.2 Detecció en l'entorn terrestre	46
4.3 Experiment de LIGO, 2015	47

Introducció

La detecció d'ones gravitacionals l'any 2015 amb el Laser Interferometer Gravitational-Wave Detector (LIGO) va ser una de les fites recents de la recerca científica més mediàtiques, per la dificultat de la tasca però també per una història centenària de debat sobre la seva existència. Aquest fenomen va ser concebut el 1915 amb la publicació de la teoria de la relativitat general d'Albert Einstein, qui a més en va conjecturar l'existència. El punt de partida d'aquesta teoria és la descripció de l'espai i el temps conjuntament com una varietat semi-riemanniana i la identificació de la gravetat amb l'efecte de la seva curvatura, uns conceptes geomètrics que s'estudien en el marc de la geometria creada per Friedrich Riemann el 1856. La geometria riemanniana va anar desenvolupant el seu potencial en la descripció d'estructures abstractes fins que va resultar evident que no era només un exercici matemàtic sinó una eina clau per a descriure la realitat.

L'objectiu d'aquest text és situar el lector en el marc de la teoria de la relativitat general i, utilitzant una descripció matemàticament rigorosa, entendre amb quines equacions treballen, en quines circumstàncies les seves solucions es comporten com a ones i com afecten l'espai i el temps on es troben per, al final, poder entendre com funciona l'experiment del LIGO i per què va resultar un èxit molt prometedori per a la comunitat cosmològica. Encara que en el transcurs de les explicacions es procura ser detallat i resoldre els dubtes immediats que puguin sorgir-li al lector, ha resultat inevitable delegar demostracions i donar alguns conceptes inicials per coneguts. Es vol seguir l'exemple de [1], un article fantàstic sobre aquest tema, tot discutint alguns conceptes des de punts de vista diferents i ampliant els temes que ens han semblat interessants dintre les limitacions del format.

Per fer tot això, haurem de presentar algunes eines de la geometria diferencial que ens permetin parlar breument dels principis de la relativitat general. Les equacions d'aquesta teoria van ser proposades per Einstein segons les propietats físiques que s'esperava que complissin, però nosaltres veurem que poden ser motivades des del punt de vista variacional amb el principi de Hamilton, com va demostrar Hendrik Lorentz (peça clau en la teoria de la relativitat especial que va precedir la general) l'any mateix de la seva publicació [2]. Un dels principis justificarà que utilitzem difeomorfismes de la varietat de l'espai i el temps sense alterar-ne les equacions, un concepte que serà clau per fer evident que les equacions d'Einstein, un cop linealitzades, tenen forma d'equació ondulatoria. El desenvolupament d'aquesta linealització ens permetrà a més mencionar altres tractaments en l'estudi de la gravetat, com el gravitomagnetisme i l'aproximació a les equacions de Newton.

Les ones són un fenomen ubic en la ciència, en especial la física, així que és habitual tenir una idea naïf de què volem dir quan parlem d'ones gravitatòries. Però un coneixement preliminar de la teoria de la relativitat general és suficient per sospitar que aquesta descripció de la gravetat no és en absolut trivial. Per tractar aquest tema, haurem de dedicar un apartat a conceptes analítics que motivin l'elecció d'ones planes en la caracterització final del seu efecte sobre la realitat. Aquesta secció no hagués estat possible sense la col·laboració de la Maria Jesús Carro, que m'ha facilitat les eines [3] per donar-li el rigor necessari.

El treball s'estructurarà en seccions amb els següents continguts. En la primera, hi tindrem la introducció dels elements de geometria diferencial en un llenguatge modern [4, 5] que seran necessaris al llarg de tot el treball. També hi ha un petit índex a altres definicions importants però que nosaltres només farem servir en desenvolupaments concrets.

En la secció 2 utilitzarem el càlcul variacional per motivar l'equació d'Einstein i, després de trobar-la, exposarem els conceptes més importants de la teoria de la Relativitat General.

La secció tercera mostra pas a pas la linealització de l'equació i parla de les eines que ens permeten canviar la referència per arribar a l'equació d'ona. També és on hem situat la descripció analítica de les solucions a aquesta equació, i acaba amb una menció breu a la formació de les ones.

L'última secció conté un tractament intuïtiu d'observadors en caiguda lliure que ens permeti entendre les equacions anteriors i el seu efecte en la terra, culminant amb l'aparell del LIGO i les seves mesures.

És important destacar quins coneixements previs s'esperen del lector. La descripció que es fa de connexions i varietats semi-riemannianes requereix els conceptes de varietat diferenciable i les bases del càlcul tensorial. La secció d'anàlisi dona per suposada una comprensió bàsica de la teoria de mesures i espais integrables. La majoria de les referències ([4] per geometria, [3] per anàlisi) en tenen una introducció. Veurem que sovint citem [4, 6] simultàniament. El primer és un text més rigorós matemàticament, mentre que el segon està enfocat amb un caire més físic, i a vegades tindrà discussions més extenses sobre els fenòmens que es tracten, així que és interessant poder escollir entre els dos segons els interessos del lector.

A més, es vol notar que s'utilitza al llarg del treball la notació d'Einstein, per la seva comoditat, en la qual se sobreenten els sumatoris sobre els índexs que estan repetits sempre que no hi hagi confusió possible. Així, $\sum_i \eta^i h_{ij}$ esdevé $\eta^i h_{ij}$, per exemple. També es fa servir la convenció de lletres llatines per als índexs de l'1 al 3 i grecs quan són del 0 al 3; això és útil quan treballem amb espais de Lorentz de dimensió 4. En la mètrica d'aquests espais, també obviarem la constant de la velocitat de la llum c , considerant-la igual a 1. Normalment multiplica la coordenada temporal, igualant-la dimensionalment a les altres.

1 Geometria diferencial

Per parlar de gravitació en els termes de la relativitat general, és imprescindible fer-ho a través de les eines de la geometria diferencial. L'objectiu d'aquest primer apartat és establir alguns dels conceptes bàsics que es faran servir de manera habitual al llarg del treball, i que per tant cal assumir de manera prèvia. Altres definicions o teoremes que s'utilitzen de manera puntual les trobarem durant el desenvolupament, i se'n recopilen les pàgines al final de la secció. Es dona per suposat un coneixement bàsic sobre varietats diferenciables i càlcul tensorial. També entendrem diferenciable per suficientment diferenciable, en el grau que requereixi el context, tot i que és habitual trobar les definicions d'aquest apartat directament per a funcions infinitament diferenciables.

1.1 Varietats de Lorentz

La geometria Riemanniana redueix les propietats geomètriques d'un espai al comportament de la mètrica en el seu espai tangent, requerint només que l'espai tingui les propietats d'una varietat. D'aquesta manera, podem estudiar qualsevol varietat si la dotem d'un producte escalar, que representarem amb el tensor mètric:

Definició 1.1. *Sigui l'índex s d'un producte escalar $\varphi(\cdot, \cdot)$ en un espai vectorial V la màxima dimensió dels subespais $U \subset V$ on $\varphi(x, y) < 0 \forall x, y \in U$. En una varietat diferenciable M , anomenem tensor mètric g a un camp tensorial $(0,2)$ si el producte escalar induït $(X, Y) = g_p(X, Y)$ en $\forall X, Y \in T_p(M)$ té el mateix índex $\forall p \in M$.*

Observem que un canvi de signe en g fa que els subespais de dimensió més gran on g_p és definit positiu passin a ser subespais amb g definit negatiu, i viceversa. Així, si classifiquem les varietats dotades d'un tensor mètric, podem relacionar els tensors mètrics d'índex k i $n-k$ amb n la dimensió de la varietat de forma natural.

Definició 1.2. *Sigui una varietat diferenciable M i dimensió m i un tensor mètric g , anomenem varietat semi-Riemanniana al doblet (M, g) . Segons l'índex $0 \leq v \leq m$ del tensor g , distingim els casos particulars: a) (M, g) és una varietat Riemanniana si $v=0$. En aquest cas g és definit positiu. b) (M, g) és una varietat Lorentziana si $v=1$ i $n \geq 2$.*

També direm que els espais vectorials tangents $T(M) = \{T_p M; \forall p \in M\}$ a la varietat són espais de Riemann o de Lorentz en cada cas. Ara ens serà útil veure algunes definicions relacionades amb el tensor mètric. Primer, la seva expressió habitual donat un sistema de coordenades $\{x^i\}_i$ de $U \subset M$. Per a un sistema així tindrem associades una base de l'espai tangent $\{\partial/\partial x^i\}_i$ i del seu dual $\{dx^i\}_i$. Com a tensor $(0,2)$, doncs, expressarem g com:

$$g = \sum_{ij} g_{ij} dx^i \otimes dx^j = g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Hem aprofitat la segona igualtat per introduir la notació d'Einstein, on se sobreentenen els sumatoris per als índexs que estan repetits si no s'especifica el contrari. Per les varietats de Lorentz, on la mètrica no és definida positiva, diem:

Definició 1.3. *En un espai de Lorentz V amb tensor mètric g , els vectors tangents seran **espacials** (si $g(v, v) > 0$ o $v = 0$), **lumínics** (si $g(v, v) = 0$ i $v \neq 0$) o **temporals** (si $g(v, v) < 0$)*

Direm que una corba α és d'un d'aquests tipus quan el vector velocitat α' sigui del mateix tipus en tots els punts. Aquesta caracterització està lligada al caràcter causal de les corbes de la varietat donada per la relativitat. Si la nostra varietat és l'espai-temps, podem veure amb la relativitat especial (cap. 6 de [4]) que la trajectòria d'una partícula no pot superar la velocitat de la llum i això implica que el seu vector velocitat v compleix $g(v, v) \leq 0$. Així, dos punts de la varietat només podran tenir relació causal si existeix una corba temporal o lumínica que els uneixi.

Definició 1.4. *Segui el conjunt de vectors temporals \mathcal{T} d'un espai de Lorentz V . Per un $u \in \mathcal{T}$, anomenem con temporal i con temporal oposat, respectivament, a:*

$$CT(u) = \{v \in \mathcal{T} : (u, v) < 0\}, \quad -CT(u) = \{v \in \mathcal{T} : (u, v) > 0\} = CT(-u).$$

Com que u genera un subespai V on g té índex 1, i l'índex de g a V també és 1, u^\perp és un subespai de vectors espacials, o sigui $(v, u) = 0 \Leftrightarrow v \in u^\perp \Leftrightarrow v \notin \mathcal{T}$. Per tant, $v \notin \mathcal{T} \Leftrightarrow (v, u) = 0 \Leftrightarrow v \notin C(u) \cup C(-u)$. La unió disjunta dels cons és doncs el conjunt de tots els vectors temporals. A més, es pot demostrar que dos vectors u, v estan al mateix con temporal si i només si $(u, v) < 0$, així és igual el representant u excepte per la tria de quin és el con invers. Fer aquesta tria és donar una orientació temporal a la varietat:

Definició 1.5. *Una funció τ en una varietat M que assigna un con de temps τ_p a cada punt $p \in M$ serà una orientació temporal de M si és diferenciable en el sentit que en cada entorn U_p de p existeix un camp vectorial V tal que $V(q) \in \tau_p \forall q \in U_p$. Si per una varietat M existeix una funció τ com aquesta, M és orientable temporalment.*

Es pot caracteritzar una varietat com a orientable temporalment amb l'existència d'un camp vectorial temporal X a tota la varietat, però no ho necessitem.

L'espai-temps en la teoria de la relativitat general serà un espai de Lorentz de dimensió 4, i la seva estructura geomètrica concreta dependrà de la matèria que conté segons les equacions d'Einstein que veurem més endavant.

1.2 Connexions i derivades covariants

Una de les propietats més importants de la geometria és el concepte de paral·lelisme. La noció euclidiana habitual no té sentit per a les propietats més generals de les varietats semi-Riemannianes; hem d'usar el concepte de connexió.

Definició 1.6. En una varietat M , denotem el conjunt de camps vectorials i funcions diferenciables definides a tota la varietat per $\mathcal{X}(M)$ i $\mathcal{F}(M)$ respectivament. Una connexió en una varietat diferenciable M és una funció $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \Rightarrow \mathcal{X}(M)$ que compleix, $\forall V, W \in \mathcal{X}(M)$ i $\forall f \in \mathcal{F}(M)$:

- a) $\nabla_{fV}W = f\nabla_VW$.
- b) $\nabla_V(\lambda W) = \lambda\nabla_VW \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- c) $\nabla_V(fW) = (Vf)W + f\nabla_VW$.

Com que la connexió es comporta com un tensor sobre V , per a) la connexió ens permet tenir una derivada ben definida que no depèn de les coordenades.

Definició 1.7. Sigui una varietat M dotada d'una connexió ∇ . Donats un camp vectorial $V \in \mathcal{X}(M)$, anomenem derivada covariant respecte V a l'aplicació $\nabla_V : \mathcal{X}(M) \Rightarrow \mathcal{X}(M)$.

Però ens serà útil tenir-ne l'expressió per un sistema de coordenades. Utilitzarem:

Definició 1.8. Per una varietat M amb una connexió ∇ , donat un sistema de coordenades $\{x^i\}_i$ en $U \subset M$, els símbols de Christoffel de la connexió són les funcions reals Γ_{ij}^k tals que:

$$\nabla_{\partial_i}(\partial_j) = \Gamma_{ij}^k \partial_k,$$

de manera que l'expressió de la derivada covariant respecte un vector $V = V^i \partial_i$ és

$$\nabla_V W = V^i \nabla_{\partial_i}(W^j \partial_j) = V^i \left(\partial_i W^k + \Gamma_{ij}^k W^j \right) \partial_k. \quad (1.1)$$

De la descripció anterior, podem veure que la derivada covariant actua com la derivada direccional sobre les funcions de $\mathcal{F}(M)$, o sigui, $\nabla_V(f) = V(f)$. També podem generalitzar la derivada covariant a tensors.

Definició 1.9. La derivada covariant d'un tensor A tipus (r,s) en M és un tensor $(r,s+1)$ ∇A definit per

$$(\nabla A)(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s, V) = (\nabla_V A)(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s). \quad (1.2)$$

amb V, X_i elements de $\mathcal{X}(M)$ i ω^i del seu dual $\mathcal{X}^*(M)$

Es pot veure al capítol 2 de [4], que aquesta derivada és una derivada tensorial.

Definició 1.10. Una derivada tensorial en una varietat M és una aplicació \mathcal{D} lineal en \mathbb{R} que commuta amb les contraccions dels tensors i $\forall A, B$ tensors en M , compleix $\mathcal{D}(A \otimes B) = \mathcal{D}A \otimes B + A \otimes \mathcal{D}B$ i la regla del producte $\mathcal{D}[A(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s)] = (\mathcal{D}A)(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) + \sum_i A(\dots, \mathcal{D}\omega^i, \dots) + \sum_j A(\dots, \mathcal{D}X_j, \dots)$.

De fet, l'última propietat es pot demostrar a partir de les primeres dues. Ens interessa utilitzar la regla del producte amb 1.2 per veure la derivada covariant d'un tensor $(0,2)$ com el tensor mètric. En un sistema de coordenades $\{x^i\}_i$:

$$(\nabla g)(X, Y, V) = (\nabla_V g)(X, Y) = \nabla_V(g(X, Y)) - g(\nabla_V X, Y) - g(X, \nabla_V Y) =$$

$$= V^i X^j Y^k \partial_i g_{jk} - g_{jk} V^i \Gamma_{im}^j X^m Y^k - g_{jk} V^i X^j \Gamma_{im}^k Y^m.$$

Els components seran, per tant:

$$(\nabla g)_{ijk} = \partial_i g_{jk} - \Gamma_{ij}^l g_{lk} - \Gamma_{ik}^l g_{jl}. \quad (1.3)$$

Ara estem en condicions de definir que un camp vectorial V és paral·lel si $\nabla_X V = 0 \forall X \in \mathcal{X}(M)$. Hem assolit doncs el concepte de paral·lisme de manera independent a la mètrica. Tanmateix, ens pot ser útil exigir que en una varietat on hem definit un tensor mètric les dues estructures funcionin de manera natural l'una amb l'altra.

Definició 1.11. *Sigui una varietat diferenciable M dotada d'un tensor mètric g_{ij} i una connexió ∇ . Direm que aquestes dues estructures són compatibles si per qualsevol camp vectorial X sobre M es compleix $\nabla_X g = 0$.*

En relativitat general, volem utilitzar una connexió que sigui compatible amb la mètrica i que, a més, sigui simètrica en els índexs inferiors dels símbols: $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$ (normalment direm simplement que la connexió és simètrica). El següent resultat ens permet relacionar els símbols d'una connexió tal de manera inequívoca amb els components de la mètrica:

Teorema 1.12. *Sigui una varietat diferenciable M dotada d'un tensor mètric g_{ij} . Els símbols associats a qualsevol connexió simètrica ∇ definida en M compatible amb la mètrica g hauran de complir, en un sistema de coordenades $\{x^i\}_i$:*

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} \left(\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{ij} \right), \quad (1.4)$$

de manera que aquesta connexió és única. L'anomenarem connexió de Levi-Civita.

Prova: Aplicant 1.3 al tensor mètric (0,2) en les coordenades donades, trobem les següents igualtats:

$$\nabla_r g_{mn} = \partial_r g_{mn} - \Gamma_{rm}^l g_{ln} - \Gamma_{rn}^l g_{ml} = 0,$$

$$\nabla_m g_{nr} = \partial_m g_{nr} - \Gamma_{mn}^l g_{lr} - \Gamma_{mr}^l g_{nl} = 0,$$

$$\nabla_n g_{rm} = \partial_n g_{rm} - \Gamma_{nr}^l g_{lm} - \Gamma_{nm}^l g_{rl} = 0.$$

Prenent la primera expressió i restant-li les altres dues, trobem:

$$\partial_r g_{mn} - \partial_m g_{nr} - \partial_n g_{rm} + 2\Gamma_{mn}^l g_{lr},$$

ja que la simetria de Γ respecte els índexs inferiors cancel·la la majoria de termes. Només ens queda veure que, aïllant Γ i multiplicant per g^{ir} resulta:

$$\Gamma_{mn}^l g^{ir} g_{lr} = \Gamma_m^i n = \frac{1}{2} g^{ir} \left(\partial_m g_{nr} + \partial_n g_{rm} - \partial_r g_{mn} \right),$$

que amb un canvi d'índexs és la igualtat del teorema. \square

1.3 Transport paral·lel i geodèsiques

Havent caracteritzat el que entenem per camp vectorial paral·lel en una varietat M , podem utilitzar aquest concepte per definir el transport paral·lel d'un vector al llarg d'una corba. Entendrem per camp vectorial paramètric sobre una corba $\alpha : I \Rightarrow M$ l'aplicació diferenciable que assigna a cada t de I un vector de l'espai $T_{\alpha(t)}(M)$. Es pot demostrar que l'espai de camps vectorials sobre α , \mathcal{X}_α serà l'espai dels camps vectorials paramètrics mòdul les reparametritzacions $F(I)$ de I .

Definició 1.13. *Sigui $\alpha : I \Rightarrow M$ una corba en una varietat Riemanniana M de connexió ∇ , i Z un camp vectorial de \mathcal{X}_α . Anomenarem derivada covariant de Z induïda per α a la funció $\nabla_\alpha : \mathcal{X}_\alpha \Rightarrow \mathcal{X}_\alpha$ que porta Z a $Z' = DZ/dt$ tal que*

- a) $(aZ_1 + bZ_2)' = aZ_1' + bZ_2' \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$,
- b) $(hZ)' = (\frac{dh}{dt})Z + hZ' \quad \forall h \in F(I)$,
- c) $(V_\alpha)'(t) = \nabla_{\alpha'(t)}(V) \quad \forall V \in \mathcal{X}(M)$.

Denotant les components de la corba per un sistema de coordenades donat $\{x^i\}_i$, per les primeres dues propietats tindrem:

$$Z'(t) = (Zx^i)(t)\partial_i \Rightarrow Z' = \frac{dZ^i}{dt}\partial_i + Z^i(\partial_i|_\alpha)', \quad (1.5)$$

i podem veure que la propietat c) ens relaciona aquesta expressió amb la connexió ∇ de manera que la derivada covariant induïda està únicament determinada per ∇ . Així doncs, seguint l'exemple d'abans direm que Z és paral·lel al llarg de α si $Z' = 0$ per ∇_α . Com que 1.5 genera un sistema lineal amb equacions definides per tots els punts de I , donat un punt $a \in I$ i un vector $z \in T_{\alpha(a)}(M)$, existirà un únic camp vectorial Z paral·lel al llarg d' α tal que $Z(a) = z$. El camp Z serà el transport paral·lel de z per α . A més, es pot utilitzar la compatibilitat de la mètrica amb la connexió per veure que el transport paral·lel és una isometria lineal.

Un cas especial de camp vectorial a una corba γ és el camp $Z = \gamma'$.

Definició 1.14. *Sigui una corba γ en una varietat M . Si el camp vectorial γ' és paral·lel en el sentit de la derivada covariant induïda per α direm que γ és una geodèsica.*

La condició de paral·lelisme de $Z = \gamma'$ és $Z' = 0$, així que sovint es diu que γ és una geodèsica si té acceleració $\gamma'' = Z' = 0$. Aquesta nomenclatura és transparent en la relació entre geodèsiques ($\gamma'' = 0$) i trajectòries en caiguda lliure (absència de forces i per tant d'acceleració), com veurem més endavant. Per altra banda, observem que per tenir una geodèsica en coordenades $\{x^i\}$ tindrem les equacions:

$$\frac{d^2(x^i \circ \gamma)}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{d(x^j \circ \gamma)}{dt} \frac{d(x^k \circ \gamma)}{dt} = 0. \quad (1.6)$$

Com que aquestes equacions són ordinàries, la existència i unicitat de solucions per aquest tipus d'equacions ens dirà que per un punt $p = \gamma(0)$ tindrem un entorn I de 0 on existeix una única geodèsica que compleixi $\gamma'(0) = v$ per un v de $T_p(M)$

1.4 Curvatura: tensor de Riemann

Hem mencionat que la relativitat general identifica la gravetat amb l'efecte de la curvatura d'una varietat vista pels observadors que l'habiten. La curvatura d'una varietat n'és un invariant isomètric, i per tant és interessant des del punt de vista geomètric. El podem entendre com una mesura de com difereix el transport paral·lel d'un camp vectorial a través de dos camps vectorials diferents, i per tant el definirem a partir de les derivades covariants anteriors.

Definició 1.15. *Sigui una varietat diferenciable M i tres camps de vectors qualssevol X, Y, Z . Anomenem curvatura de Riemann R al tensor $(1,3)$ definit com*

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \quad (1.7)$$

Similarment, podem caracteritzar com un sistema de camps vectorials es cargola:

Definició 1.16. *Sigui una varietat diferenciable M i dos camps de vectors qualssevol X, Y . Anomenem torsió T al tensor $(1,2)$ definit per*

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]. \quad (1.8)$$

És útil veure quina relació hi ha entre la torsió i els símbols de la connexió. El lema següent justifica per què podem parlar indistintament d'una connexió sense torsió i d'una connexió simètrica. De fet, en alguns llibres podem trobar que la definició de connexió simètrica és $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, que com veiem en la definició anterior és equivalent a dir que $T(X, Y) = 0$ per tot X, Y .

Lema 1.17. *En una varietat diferenciable dotada d'una connexió, els components del tensor de torsió T es poden expressar com:*

$$T_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i. \quad (1.9)$$

Prova: Prenent dos camps vectorials qualssevol U i V , explicitem l'expressió 1.8 en components sobre una base coordinada i desenvolupem la derivada covariant:

$$\begin{aligned} T_{jk}^i U^j V^k &= U^j \nabla_j V^i - V^j \nabla_j U^i - (U^j \partial_j V^i - V^j \partial_j U^i) = U^j (\partial_j V^i + \Gamma_{jk}^i V^k) - \\ &- V^j (\partial_j U^i + \Gamma_{jk}^i U^k) - U^j \partial_j V^i + V^j \partial_j U^i = U^j V^k \Gamma_{jk}^i - V^j U^k \Gamma_{jk}^i = U^j V^k (\Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Comparant el primer i l'últim terme queda clara la relació del lema. \square

La torsió pot ser recuperada com un grau de llibertat en altres teories de la gravitació com la teoria d'Einstein-Cartan [7], però en el nostre cas, utilitzant la connexió de Levi-Civita, la podem ignorar. Ara, partint de la definició del tensor de Riemann, ens resultarà útil per a més endavant esbrinar quins components tindria en un sistema de coordenades donat.

Lema 1.18. *Segui una varietat diferenciable M , un punt p de M amb coordenades locals de base x^μ i una connexió de torsió nul·la ∇ definida a M . Les components del tensor de curvatura a p s'expressaran com*

$$R_{slm}^r = \partial_l \Gamma_{ms}^r - \partial_m \Gamma_{ls}^r + \Gamma_{lt}^r \Gamma_{ms}^t - \Gamma_{mt}^r \Gamma_{ls}^t. \quad (1.11)$$

Prova: Substituint les derivades covariants de forma explícita i utilitzant que sense torsió, per 1.9, implica $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$, de manera similar al desenvolupament anterior tenim:

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= X^l \nabla_l (Y^n \nabla_n Z^r) - Y^l \nabla_l (X^n \nabla_n Z^r) - \nabla_{[X, Y]} Z = \\ &= X^l \left((\nabla_l Y^n) \nabla_n Z^r + Y^n (\nabla_l \nabla_n Z^r) \right) - Y^l \left((\nabla_l X^n) \nabla_n Z^r + X^n (\nabla_l \nabla_n Z^r) \right) - \nabla_0 Z = \\ &= X^l (\partial_l Y^n + \Gamma_{ml}^n Y^m) \nabla_n Z^r + X^l Y^n (\partial_l (\nabla_n Z^r) - \Gamma_{ln}^m \nabla_m Z^r + \Gamma_{ls}^r \nabla_n Z^s) - \\ &\quad - Y^l (\partial_l X^n + \Gamma_{ml}^n X^m) \nabla_n Z^r - Y^l X^n (\partial_l (\nabla_n Z^r) - \Gamma_{ln}^m \nabla_m Z^r + \Gamma_{ls}^r \nabla_n Z^s) = \\ &= (X^l Y^m - X^m Y^l) \left[\Gamma_{ml}^n (\partial_n Z^r + \Gamma_{sn}^r Z^s) + \partial_l (\partial_m Z^r + \Gamma_{sm}^r Z^s) - \right. \\ &\quad \left. - \Gamma_{lm}^s (\partial_s Z^r + \Gamma_{ts}^r Z^t) + \Gamma_{ls}^r (\partial_n Z^s + \Gamma_{tn}^s Z^t) \right] + [X, Y]^n \nabla_n Z^r = \\ &= X^l Y^m \left[(\partial_l \Gamma_{ms}^r) - (\partial_m \Gamma_{ls}^r) + \Gamma_{lt}^r \Gamma_{ms}^t - \Gamma_{mt}^r \Gamma_{ls}^t \right] Z^s. \end{aligned} \quad (1.12)$$

On hem utilitzat que $\partial_l (\Gamma_{sm}^r Z^s) - \Gamma_{sm}^r \partial_l Z^s = (\partial_l \Gamma_{sm}^r) Z^s$. \square

A partir del tensor de curvatura de Riemann es poden construir altres tensors també relacionats amb la curvatura. En la relativitat general és habitual trobar, en concret:

Definició 1.19. *Segui una varietat M amb una connexió ∇ i una mètrica g . Si R_{ijk}^l és el seu tensor de Riemann, anomenarem tensor de Ricci a la contracció $R_{ij} = R_{ikj}^k$ i escalar de Ricci a $\mathbf{R} = g^{ij} R_{ij} = g^{ij} R_{ikj}^k$.*

De la mateixa manera que hem interpretat que R_{jkl}^i mesura com canvia un camp vectorial desplaçat infinitesimalment per un camp vectorial X i un altre camp Y com canvia si ho fem en l'ordre invers, aquests tensors també tenen una interpretació geomètrica intuïtiva. L'escalar de Ricci ens descriu aproximadament com canvia el volum d'una bola $B(p, r)$ en un entorn d'un punt p respecte el volum que tindria en un espai euclidià (i ho descriu amb exactitud en el límit $r \Rightarrow 0$), mentre que el tensor de Ricci descriu com canvia el volum d'aquesta bola en desplaçar-la en una direcció η de $T_p(M)$.

1.5 Altres definicions

Volem destacar aquí que hi ha altres conceptes geomètrics bàsics que nosaltres només farem servir de manera puntual. Trobarem la definició de derivada de Lie a la pàgina 27 i la dels camps de Jacobi a la pàgina 44.

2 L'equació de gravitació

L'equació que regeix la relativitat general d'Einstein relaciona el tensor de moment-energia $T_{\mu\nu}$, que introduïrem en aquesta secció, amb el tensor d'Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$. $T_{\mu\nu}$ conté informació de la matèria que hi ha a l'espai, incloent la densitat de massa. Com que aquest paràmetre regeix la mecànica Newtoniana, podríem esperar que tingués vincles també amb la curvatura. La deducció d'aquesta equació va ser fruit de buscar el tensor de curvatura més senzill que es pogués igualar de manera directament proporcional a $T_{\mu\nu}$, que és simètric i té derivada covariant nul·la ($\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$) per a complir la conservació de l'energia. El tensor de Riemann no complia aquestes condicions, però el tensor d'Einstein sí.

Malgrat aquest raonament va dur a trobar l'equació correcta, és potser més interessant analitzar com a través del càlcul variacional podem trobar que, efectivament, l'equació de la gravitació d'Einstein sorgeix naturalment quan provem d'aplicar el principi de Hamilton per minimitzar l'acció de Hilbert S_H .

2.1 Càlcul variacional

L'eina bàsica de treball en el càlcul variacional és el funcional S , anomenat acció.

Definició 2.1. *Sigui K un cos i V un espai vectorial sobre el cos K . Un funcional és una aplicació $F : V \Rightarrow K$.*

Definició 2.2. *Siguin x un punt qualsevol en una varietat M i ξ un element de $T_x(M)$. Considerem una funció $L(x, \xi)$, que anomenarem Lagrangiana. Sigui dos punts fixos P i Q en un entorn connex dins M . Anomenarem acció al funcional*

$$S[\gamma] = \int_P^Q L(x(t), \dot{x}(t)) dt, \quad (2.1)$$

per cada corba γ que uneix P i Q .

Observem que S és en efecte un funcional definit sobre l'espai vectorial \mathcal{L} de funcions integrables de la forma de L sobre el cos dels reals per estar definit sobre elements d'una varietat. Un exemple de funció L pot ser $L(x, \xi) = \sqrt{g_{ij}\xi^i\xi^j}$. En aquest cas, l'acció seria equivalent a la longitud d'arc de la corba γ . En més d'un context ens podria interessar trobar la corba que té longitud mínima, o sigui, que presenta la mínima acció; el nostre objectiu és poder aplicar aquesta noció per a una funció L qualsevol. Ara, per treballar en problemes variacionals de dimensions més altes voldrem plantejar un funcional equivalent a S de forma natural, i veure com hem de tractar les variacions d'aquest funcional. Abans, però, necessitem alguns conceptes:

Definició 2.3. *Sigui U una regió d'una varietat M^m amb coordenades locals x^1, \dots, x^m , una altra varietat N^n i l'espai F de funcions lineals $f : M^m \Rightarrow N^n$, $f(x^1, \dots, x^m) = (f^1, \dots, f^n)$. Sigui una funció C^∞ $L(x^\beta; p^j; q_\alpha^i)$ (β, α de 1 a m ; i, j de 1 a n) que*

pren valors reals. Anomenarem aquesta funció Lagrangiana i definirem el funcional:

$$I[f] = \int_U L(x^\beta; f^j(x^\beta); \frac{\partial f^i(x^\beta)}{\partial x^\alpha}) d^n x, \quad (2.2)$$

per cada funció f de F .

Per estudiar com minimitzar-lo, necessitem alguna noció de derivada:

Definició 2.4. *Segui un funcional I definit sobre l'espai de funcions F , direm que una variació δI del funcional a f per una pertorbació δf és:*

$$\int \frac{\delta I}{\delta f} \delta f d^n x = \left. \frac{dI[f + \epsilon \eta]}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (I[f + \epsilon \eta] - I[f]), \quad (2.3)$$

on la pertorbació $\eta = \delta f$ és una funció que s'anul·la a la frontera de D .

L'última igualtat és només la definició clàssica de derivada, mentre que la condició que η s'anul·li a la frontera de D és l'extensió natural de fixar els punts P i Q en una dimensió. És remarcable la similitud entre aquesta definició i el concepte de derivada direccional, on la funció f seria un punt de l'espai i η la direcció en què derivem. Ara que hem definit com entenem la derivació dels funcionals, veiem que trobar una funció extremal serà equivalent a anul·lar l'equació 2.3 per qualsevol pertorbació. En aquest cas, com que η serà irrellevant, estarà ben definit dir que $\delta I = 0$.

Definició 2.5. *Segui una funció $f_0 \in F$, direm que és extremal respecte un funcional $I[f]$ si $\frac{\delta I[f_0]}{\delta f} = 0$ per qualsevol pertorbació $\delta f = \eta$ que s'anul·li a la frontera de D .*

El principi de Hamilton permet caracteritzar l'evolució de qualsevol sistema físic atribuint-li una acció determinada i aquelles equacions que facin que sigui extremal. En general, doncs, podem trobar una acció que descriu el sistema que volem estudiar i veure quines condicions ens duen a $\delta I[f_0]/\delta f = 0$, però és habitual utilitzar les equacions d'Euler-Lagrange, que podem trobar desenvolupant $\delta I[f_0]/\delta f$ amb cura, i que serveixen per estudiar el Lagrangiana en comptes de l'acció.

Teorema 2.6. *Una funció $f_0 \in F$ serà extremal respecte al funcional $I[f]$ definit a dalt si satisfà el sistema d'equacions de Euler-Lagrange:*

$$\frac{\delta I[f]}{\delta f^i} = \frac{\partial L}{\partial f_0^i} - \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial f_{0,x^\alpha}^i} \right) = 0. \quad (2.4)$$

Malgrat no utilitzarem les equacions d'Euler-Lagrange per trobar les equacions d'Einstein, es poden trobar aplicant-les sobre l'acció que proposarem.

2.2 Equació d'Einstein

Ara hem de veure si podem trobar un funcional que tingui sentit per als fenòmens gravitatoris que volem estudiar. La definició de funcional ens diu que ha d'anar a l'espai dels reals, així que necessitarem integrar un escalar. Per altra banda, si sabem que ha d'estar relacionat amb la curvatura de l'espai, com que els graus de llibertat del tensor mètric ens permeten trobar unes coordenades locals tals que sigui trivial i les primeres derivades nul·les, voldríem relacionar el nostre escalar amb el tensor de curvatura R_{jkl}^i , que depen de les segones derivades. Ja hem presentat un escalar amb aquestes característiques: l'escalar de Ricci R . Val a dir que el tensor mètric trivial que mencionem és $\eta_{ij} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. L'anomenarem mètrica de Minkowski i descriu un espai pla ($R_{jkl}^i = 0$).

Definició 2.7. *Sigui una varietat de Lorentz M , g la seva corresponent mètrica i una connexió ∇ compatible amb la mètrica donada. L'acció de Hilbert serà el funcional*

$$S_H = \int_A R d\Omega = \int_A R \sqrt{|g|} d^4x. \quad (2.5)$$

amb R l'escalar de Ricci de la varietat, $g = \det(g_{ij})$ i $d\Omega$ l'element de volum estàndard en una varietat Lorentziana. Aquesta acció direm que és la contribució del camp gravitatori en absència de matèria en una regió A determinada per $x_1^0 \leq x^0 \leq x_2^0$, amb x_1^0 i x_2^0 fixats

Fent els càlculs necessaris per expressar el Lagrangia en termes de la mètrica en un sistema de coordenades donat i desenvolupant les equacions d'Euler-Lagrange, podem recuperar les equacions d'Einstein. Tanmateix, és un càlcul molt llarg, així que la prova del següent teorema consistirà en veure quina forma pren la variació de l'acció δS_H en termes de la variació en la mètrica.

Teorema 2.8. *La derivada variacional de l'acció de Hilbert s'expressa*

$$\delta S_H = \int \left(R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} \right) \delta g^{ij} \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.6)$$

i per tant les solucions maximals respecte g_{ij} compliran

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = 0. \quad (2.7)$$

Prova: El caràcter diferencial de les variacions en el funcional δI que hem vist justifica que tractem les variacions del Lagrangia que integrem terme a terme. Així doncs, substituint $|g|$ per $-g$, ja que sabem que es tracta d'un tensor (1,3):

$$\delta S_H = \delta \int g^{ij} R_{ij} \sqrt{-g} d^4x = \int \left(R_{ij} \sqrt{-g} \delta g^{ij} + R_{ij} g^{ij} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{km}} \delta g^{km} + g^{ij} \sqrt{-g} (\delta R_{ij}) \right) d^4x. \quad (2.8)$$

La nostra intenció és deixar-ho tot dependent de la variació en la mètrica. Així doncs, cal desenvolupar $\frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{km}}$ i també δR_{ij} en termes de δg^{ij} .

En primer lloc, podem tractar el tensor g en termes dels components. Usant la següent identitat per al càlcul del determinant de $A = \{a_{ij}\}_{ij}$, $\det A = \sum_k a^{ik} (\text{Adj}(A))_{ik}$ per tot i , on $\text{Adj}(A)$ és la matriu amb l'adjunt de a_{ij} en la posició ij , és clar que

$$\left(g \text{Adj}(g)^T\right)_j^i = g^{ik} (\text{Adj}(g)^T)_{kj} = g^{ik} \text{Adj}(g)_{jk} = \mathbf{g} \delta_j^i,$$

ja que per $i=j$ es correspon a l'expressió del determinant i per $i \neq j$ és equivalent al determinant de A amb una còpia de la fila i a la fila j , i per tant és nul. Ara bé, com que si considerem g^{ij} independent de g^{ji} aleshores $\text{Adj}(g)_{ij}$ no depèn de g^{ij} , podem derivar l'expressió $\det g = g^{ij} \text{Adj}(g)_{ij}$ respecte g^{ij} i, amb la relació anterior, trobar:

$$\frac{\delta \mathbf{g}}{\delta g^{ij}} = \frac{\delta g^{ij} \text{Adj}(g)_{ij}}{\delta g^{ij}} = \text{Adj}(g)_{ij} = g_{ik} g^{ik} \text{Adj}(g)_{ij} = g_{ik} \delta_j^k \mathbf{g} = \mathbf{g} g_{ij}.$$

Amb això podem desenvolupar la derivada en el segon terme de 2.8:

$$\frac{\delta \sqrt{-\mathbf{g}}}{\delta g^{ij}} = \frac{1}{2\sqrt{-\mathbf{g}}} \frac{\delta \mathbf{g}}{\delta g^{ij}} = -\frac{1}{2} \sqrt{-\mathbf{g}} g_{ij}. \quad (2.9)$$

Si substituïm l'expressió 2.9 a 2.8 veiem que els dos primers termes de la integral queden en la forma 2.6.

Només ens queda provar que l'últim terme és nul. Veiem quina forma té el terme de δR_{ij} donades les variacions sobre els símbols de Christoffel $\tilde{\Gamma}_{mn}^l = \Gamma_{mn}^l + \delta \Gamma_{mn}^l$. Cal observar que encara que els símbols no es comportin com a tensors, si considerem dues connexions la diferència $S_{mn}^l = \tilde{\Gamma}_{mn}^l - \Gamma_{mn}^l$ si que ho farà; en concret es transformarà com un tensor dues vegades covariant i una vegada contravariant. En efecte, si prenem un camp vectorial V i la seva derivada covariant sota cada connexió ($\tilde{\nabla}_m V^l$ i $\nabla_m V^l$) tindrem dos tensors, i la seva diferència ens donarà l'acció de S sobre el camp V ($\tilde{\nabla}_m V^l - \nabla_m V^l = \partial_m V^l + \tilde{\Gamma}_{mn}^l V^n - \partial_m V^l - \Gamma_{mn}^l V^n = S_{mn}^l V^n$), de manera que S ha de tenir caràcter tensorial. Així doncs, si volem calcular la derivada covariant de la pertorbació en els símbols tindrem que, amb un raonament similar al que ens porta a 1.3, S com a tensor (1,2) obeeix:

$$\nabla_p \delta \Gamma_{mn}^l = \partial_p \Gamma_{mn}^l + \Gamma_{pq}^l \delta \Gamma_{mn}^q - \Gamma_{pm}^q \delta \Gamma_{qn}^l - \Gamma_{pn}^q \delta \Gamma_{mq}^l.$$

L'ús d'una connexió simètrica ens permet expressar el tensor de curvatura amb 1.11. Explícitament, la variació del tensor de Riemann serà:

$$\delta R_{mpn}^l = \delta \left(\partial_p \Gamma_{nm}^l \right) - \delta \left(\partial_n \Gamma_{pm}^l \right) + \delta \Gamma_{ps}^l \Gamma_{nm}^s + \Gamma_{ps}^l \delta \Gamma_{nm}^s - \delta \Gamma_{ns}^l \Gamma_{pm}^s - \Gamma_{ns}^l \delta \Gamma_{pm}^s.$$

Si substituïm l'expressió que hem trobat per la derivada covariant de la variació de la connexió en l'anterior igualtat, resulta que:

$$\delta R_{mpn}^l = \nabla_p \left(\delta \Gamma_{nm}^l \right) - \nabla_n \left(\delta \Gamma_{pm}^l \right).$$

Per tant, l'element $g^{ij} \delta R_{ij}$ que trobem a l'equació 2.8 s'expressarà:

$$g^{mn} \delta R_{mn} = g^{mn} \delta R_{mpn}^p = g^{mn} \left(\nabla_p \left(\delta \Gamma_{nm}^p \right) - \nabla_n \left(\delta \Gamma_{km}^k \right) \right) = \nabla_p \left(g^{mn} \delta \Gamma_{mn}^p - g^{mp} \delta \Gamma_{km}^k \right). \quad (2.10)$$

La naturalesa tensorial de $\delta\Gamma$ implica que la contracció amb el tensor mètric g^{mn} ens deixa un altra tensor que, en concret, es comporta com un vector. És per això que podem interpretar que l'equació 2.10 ens diu que $g^{ij}\delta R_{mn}$ és, per algun vector V , $\nabla_p V^p$. Aquesta relació que hem trobat es pot aprofitar amb el teorema de Stokes. Tot i que no hem inclòs la seva demostració ([8], secció 7.2), l'enunciarem i veurem com utilitzar-lo, que no és trivial en el nostre cas: necessitem introduir les eines bàsiques del càlcul integral en varietats, les p -formes.

Definició 2.9. *Sigui un espai vectorial V , anomenarem 1-forma a una aplicació lineal $\omega : V \Rightarrow R$. Així doncs, les 1-formes són elements de l'espai dual a V .*

Com que treballem sobre una varietat Lorentziana, ens interessaran les 1-formes sobre el camp vectorial $T(M)$. Observem a més que són tensors $\binom{0}{1}$; per a tractar integrals ens interessa un tipus particular de tensors $\binom{0}{p}$:

Definició 2.10. *En una espai vectorial de dimensió n , anomenarem p -forma o forma de grau p a un tensor $\binom{0}{p}$ completament antisimètric. L'expressió en components d'una p -forma α en la base de 1-formes $\{\omega^i : i = 1, \dots, n\}$ associada a una base $\{e_i : i = 1, \dots, n\}$ ve donada per*

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{p!} \alpha_{i_1 \dots i_p} \tilde{\omega}^{i_1} \wedge \dots \wedge \tilde{\omega}^{i_p}, \quad (2.11)$$

on l'operador \wedge és definit per 1-formes com $\tilde{\omega}_1 \wedge \tilde{\omega}_2 \equiv \tilde{\omega}_1 \otimes \tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_2 \otimes \tilde{\omega}_1$, de manera que s'estén en general sobre dues formes d'índex p i q com:

$$\tilde{\omega}^{i_1} \wedge \dots \wedge \tilde{\omega}^{i_p} \wedge \tilde{\omega}^{j_1} \wedge \dots \wedge \tilde{\omega}^{j_q} = \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \text{sgn}(\sigma) \tilde{\omega}^{\sigma(i_1)} \otimes \dots \otimes \tilde{\omega}^{\sigma(i_p)} \otimes \tilde{\omega}^{\sigma(j_1)} \otimes \dots \otimes \tilde{\omega}^{\sigma(j_q)},$$

com esperariem per complir l'antisimetria.

Ens serà útil una notació per substituir l'expressió anterior quan vulguem antisimetritzar índexs. Utilitzarem $[i_1 \dots i_n]$ per indicar-ho. En el cas anterior, doncs, tindriem $\tilde{\omega}^{i_1} \wedge \dots \wedge \tilde{\omega}^{j_q} = \tilde{\omega}^{[i_1} \otimes \dots \otimes \tilde{\omega}^{j_q]}$ indicant $|k|$ si volguéssim ometre l'índex k del l'antisimetrització. L'últim que necessitem pel teorema és el concepte de derivada exterior.

Definició 2.11. *La derivada exterior és una aplicació de l'espai de les p -formes a l'espai de les $(p+1)$ formes que denotarem \tilde{d} i que compleix les següents propietats*

$$\begin{aligned} \tilde{d}(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) &= (\tilde{d}\tilde{\alpha}) + (\tilde{d}\tilde{\beta}), \\ \tilde{d}(\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta}) &= (\tilde{d}\tilde{\alpha}) \wedge \tilde{\beta} + (-1)^p \tilde{\alpha} \wedge (\tilde{d}\tilde{\beta}), \\ \tilde{d}(\tilde{d}\tilde{\alpha}) &= 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

donades dues formes d'índex qualsevol $\tilde{\alpha}$ i $\tilde{\beta}$. Sobre els components de $\tilde{\alpha} = \alpha_{i_1 \dots i_p} \tilde{\omega}^{i_1} \wedge \dots \wedge \tilde{\omega}^{i_p} = \alpha_I \tilde{\omega}^I$ resulta:

$$\tilde{d}\tilde{\alpha} = \nabla_i \alpha_I \tilde{\omega}^i \wedge \tilde{\omega}^I. \quad (2.13)$$

El capítol 4 de [5] està dedicat a les propietats de les n-formes i les derivades exteriors, per a més informació. El més rellevant per al següent pas és que un element de volum de dimensió p es pot representar amb una p-forma, i per tant són claus per interpretar l'acció de les integrals en una varietat sense cap estructura geomètrica. En aquest sentit, la derivada exterior ens permet relacionar-ho amb la notació convencional per a les integrals. Amb unes coordenades de la varietat $\{x^1 \cdots x^n\}$, els elements $\{\tilde{d}x^1 \cdots \tilde{d}x^n\}$ són una base de 1-formes (en efecte, ho podem comprovar definint la seva acció sobre la base vectorial $\partial/\partial x^i$ associada a les mateixes coordenades de la forma natural $\partial/\partial x^j \tilde{d}x^i = \delta_j^i$). Com que són 1-formes, es transformaran de manera contravariant, i l'antisimetria del producte \wedge agruparà els termes del canvi de coordenades formant-ne el determinant:

$$\tilde{d}x^{1'} \wedge \cdots \wedge \tilde{d}x^{n'} = \left| \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \right| \tilde{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \tilde{d}x^n,$$

mentre que el tensor mètric ho fa de manera covariant. Si en prenem el determinant, resulta:

$$g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} g_{\mu\nu} \Rightarrow |g'| = \left| \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \right|^2 |g|.$$

Per tant, resulta que $\sqrt{|g|} \tilde{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \tilde{d}x^n$ es comporta com un tensor $\binom{0}{p}$ antisimètric, justificant la notació habitual del text de física:

$$\tilde{\omega} = \sqrt{|g|} \tilde{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \tilde{d}x^n \equiv \sqrt{|g|} d^n x. \quad (2.14)$$

Teorema 2.12. Teorema de Stokes: *Sigui una regió M amb dimensió m d'una varietat V, vora ∂M i una (n-1)-forma ω definida a M. Sigui la n-forma $d\omega$, derivada exterior de ω , es compleix:*

$$\int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega. \quad (2.15)$$

A partir d'ara donarem per entès que ens referim a formes i deixarem la notació de la titlla. En el nostre cas, hem de reescriure els termes per veure a què corresponen. Per fer-ho necessitem el tensor de Levi-Civita.

Definició 2.13. *El símbol de Levi-Civita $\tilde{\epsilon}$ d'ordre n pren els valors -1 si els seus índexs són una permutació senar de (1,2,..., n), 1 si són una permutació parell, o 0 en la resta de casos.. Es pot comprovar, per combinatòria, que compleix:*

$$\sum_{\mu_1 \cdots \mu_n \nu} \epsilon_{\mu_1 \cdots \mu_n \nu} \epsilon_{\mu_1 \cdots \mu_n \lambda} = (n)! \delta_{\lambda}^{\nu}. \quad (2.16)$$

Observem que és completament asimètric. A partir d'aquest símbol definim:

Definició 2.14. *Sigui una varietat M amb una mètrica g, anomenarem tensor de Levi-Civita i el seu invers a:*

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mu_1 \cdots \mu_n} &= \sqrt{|g|} \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \cdots \mu_n}, \\ \epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_n} &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \tilde{\epsilon}^{\mu_1 \cdots \mu_n}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

on $\tilde{\epsilon}$ és el símbol de Levi-Civita i s l'índex de la mètrica. La seva contracció és:

$$\epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_n \nu} \epsilon_{\mu_1 \cdots \mu_n \lambda} = (-1)^s (n)! \delta_{\lambda}^{\nu}. \quad (2.18)$$

Un raonament similar al que ens ha portat a 2.14 ens serveix per veure que efectivament són tensors (concretament una n-forma, per l'antisimetria de $\tilde{\epsilon}$ i un n-vector), mentre que 2.18 es pot comprovar amb 2.16 i l'expressió trivial del tensor mètric que dona $|g| = (-1)^s$. Per altra banda, la dualitat entre formes i vectors juntament amb una mètrica ens permet establir una aplicació lineal de p-formes a (n-p)-formes amb n la dimensió de l'espai. Típicament s'anomena a aquesta aplicació estrella de Hodge. Aquest operador utilitza el tensor de Levi-Civita per relacionar els components de dues formes tals:

$$(*\omega)_{\nu_1 \dots \nu_p} = \frac{1}{p!} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_{n-p}}_{\nu_1 \dots \nu_p} \omega_{\mu_1 \dots \mu_{n-p}}.$$

A més, per 2.16, en el cas d'una mètrica Lorentziana (s=-1) aplicant-lo dues vegades a una p-forma obtenim

$$\begin{aligned} **\omega_{\mu_1 \dots \mu_p \lambda} &= * \left(\frac{1}{p!} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_{n-p}} \omega_{\mu_1 \dots \mu_n} \right) = \frac{1}{p! p!} \epsilon^{\nu_1 \dots \nu_{n-p}}_{\mu_1 \dots \mu_p} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_{n-p}} \omega_{\mu_1 \dots \mu_n} = \\ &= \frac{(-1)^{p(n-p)}}{p! p!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_p}^{\nu_1 \dots \nu_{n-p}} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_{n-p}} \omega_{\mu_1 \dots \mu_n} = (-1)^{s+p(n-p)} \omega_{\mu_1 \dots \mu_n}. \end{aligned}$$

En el nostre cas, tindrem l'expressió de ω a partir d'una 1-forma V i la seva inversa:

$$\omega = *V \Rightarrow \omega_{\mu_1 \dots \mu_{n-1}} = \epsilon_{\nu \mu_1 \dots \mu_{n-1}} V^\nu, \quad V = (-1)^{n-2} **V = (-1)^n * \omega.$$

Observem que hem utilitzat la mètrica per invertir la posició de l'índex ν de manera que V sigui un vector. Ara podem prendre doncs la derivada exterior:

$$(d\omega)_{\lambda \mu_1 \dots \mu_{n-1}} = (d * V)_{\lambda \mu_1 \dots \mu_{n-1}} = n \nabla_\lambda (\epsilon_{\nu \mu_1 \dots \mu_{n-1}} V^\nu). \quad (2.19)$$

Com que una n-forma és dual (per Hodge) a una funció escalar $f(x)$, resulta també que $d\omega = *f = f\epsilon$ per alguna f amb el tensor de Levi-Civita d'ordre n, i per tant l'expressió inversa és $f = (-1)^{(n-1)} **f = -(*d\omega)$. Trobem aquest element:

$$*d\omega = *d(*V) = \frac{1}{n!} \epsilon^{\lambda \mu_1 \dots \mu_{n-1}} (n \epsilon_{\nu \mu_1 \dots \mu_{n-1}} \nabla_\lambda V^\nu) = \frac{1}{(n-1)!} (-1)^s (n-1)! \delta_\nu^\lambda \nabla_\lambda V^\nu.$$

Si simplifiquem aquesta expressió i substituïm a 2.14 resultará

$$d\omega = \nabla_\lambda V^\lambda \sqrt{|g|} d^n x.$$

A l'altra banda, en canvi tenim $\omega = \epsilon_{\nu \mu_1 \dots \mu_{n-1}} V^\nu$. Si prenem el tensor ϵ com una n-forma i suposem una 1-forma η normal a la superfície ∂U , és a dir, que per qualsevol ξ tangent a ∂U , $\eta(\xi) = 0$, podem expressar $\epsilon = \eta \wedge \alpha$ per alguna (n-1)-forma α . En aquest cas, la restricció de $\epsilon(V)$ a la superfície complirà $\epsilon(V) = \eta(V)\alpha$, i per tant $\omega = \eta_\lambda V^\lambda \alpha$. Si expressem α com un element de volum de dimensió n-1 a $\partial\Omega$, $\alpha = \sqrt{|g'|} d^{(n-1)}y$, podem escriure l'expressió del teorema així

$$\int_\Omega \nabla_\lambda V^\lambda \sqrt{|g|} d^n x = \int_{\partial\Omega} n_\lambda V^\lambda \sqrt{|g'|} d^{n-1} x.$$

Finalment, com que amb l'assumpció que la nostra pertorbació s'anul·la a la vora de la regió d'integració el teorema de Stokes implica que la següent integral és 0, completem la prova.

$$\int g^{ij} \delta R_{ij} \sqrt{-g} d^4x = 0.$$

□

Observem que el teorema que hem demostrat ens dona l'equació d'Einstein en el buit, és a dir, amb un tensor de moment-energia nul. La solució per al cas general és incloure una nova acció que tingui en compte les propietats de la matèria, S_M . Concretament, es considera l'acció conjunta $S = \frac{1}{16\pi G} S_H + S_M$, de manera que la variació pren la forma:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi G} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}.$$

La definició del tensor moment-energia $T_{\mu\nu}$ no és universal, i sovint s'escull segons les propietats que s'espera que compleixin els seus components en un cas particular. Una de les definicions que s'usa, però, és justament a partir d'aquest nou terme:

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}},$$

En la bibliografia podem trobar diversos exemples (secció 1.9 de [6] pels més habituals, secció 37.3 de [9] pel de l'electromagnetisme) de com el lagrangiana adequat ens pot portar al tensor moment-energia que es defineix clàssicament per a un sistema electrodinàmic, un fluid perfecte o un núvol de pols, per exemple. En el nostre cas, ens permet trobar, ara ja si, l'equació de gravitació:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (2.20)$$

2.3 Relativitat General

Les equacions que acabem de trobar són l'eina matemàtica principal per a poder fer càlculs en el marc de la relativitat general. Tanmateix, és important repassar breument quins són els altres principis de la teoria, i algunes de les seves implicacions.

El *principi de covariància* estableix que les lleis que descriuen les interaccions físiques han de tenir la mateixa expressió en qualsevol sistema de referència. Per aquest motiu ens és útil usar els conceptes geomètrics definits per a varietats, ja que han de poder ser descrits per a qualsevol carta, que es correspon al concepte de sistema de referència. Així treballem en tot moment amb tensors (l'expressió de les equacions n'és un exemple), i substituïm les derivades parcials per les derivades covariants.

El *principi d'equivalència*, per altra banda, afirma que no podem distingir entre un sistema sota l'acció d'un camp gravitatori i un sistema accelerat. En altres

paraules, estableix que un sistema en caiguda lliure és localment indistingible d'un sistema inercial, de manera que si la gravetat l'entendem com l'efecte de la curvatura de la varietat que habitem, localment podem ignorar aquests efectes, com si no hi hagués curvatura. Aquest fenomen és consistent amb la identificació entre l'espai-temps i una varietat Lorentziana, ja que tenim la llibertat d'utilitzar un sistema de referència per tal que l'espai sigui localment isomètric a \mathbb{R}_1^4 . Cal distingir però que aquesta noció de localitat és a nivell matemàtic, és a dir, si considerem un punt de la varietat hi ha un entorn on podem parlar en aquests termes; que l'espai sigui aproximadament pla a l'escala de l'ésser humà és una propietat de l'univers que actualment sembla ser explicada a partir de la teoria de la inflació (podem veure'n més detalls a l'apartat Robertson-Walker Spacetimes del capítol 12 de [4], o la secció 8.2 de [6]), no una expressió d'aquesta propietat de l'espai-temps.

Aquest segon principi ens serveix també per entendre que un objecte lliure en l'espai-temps es mogui seguint geodèsiques. En efecte, si associem a un objecte en un punt p de la varietat un element de l'espai tangent que anomenarem velocitat, la corba α definida per aquests dos elements tindrà acceleració nul·la i per tant serà una geodèsica unívocament definida. Alhora, la curvatura de la varietat farà que la geodèsica sigui diferent a la que tindríem si la varietat fos plana: talment l'efecte de la gravetat.

Algunes d'aquestes conclusions són prou sorprenents per a aquells que no estan familiaritzats amb la teoria de la relativitat. I tanmateix, els resultats més interessants provenen sovint de les poques solucions analítiques que existeixen per a les equacions d'Einstein. L'espai-temps d'Schwarzschild és la solució adequada per descriure la gravetat de cossos celestes aïllats, ja que suposa un univers estàtic i amb simetria esfèrica. La definició d'espai-temps estàtic és subtil (es pot veure al capítol 13 de [4], que tracta en general sobre aquest espai-temps), però a grans trets ens indica que podem expressar l'espai mètric com un espai producte $I \times \mathbb{R}^3$ amb una mètrica $a(x)dt^2 + b(x)dx^3$ on els coeficients no depenen de t . De fet, es pot demostrar que només hi ha una mètrica que compleixi aquestes condicions:

$$g = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (2.21)$$

A més de poder retrobar el límit Newtonià amb aquesta solució, deixa entreveure l'existència dels forats negres. No és trivial el canvi de coordenades que s'ha de fer per veure-ho (p. 384 de [4], secció 5.6 de [6]), però la singularitat a $r = 2M$ és només aparent i es pot comprovar que passat aquest punt, les superfícies de r constant queden fora dels cons de llum, donant lloc a la propietat característica d'aquests cossos que no hi ha cap partícula, ja sigui temporal o lumínica, que en pugui sortir. Veurem amb més atenció què entenem per partícules a l'apartat següent, però amb 1.3 en tenim prou per interpretar que si no hi pot haver corbes lumíniques o temporals entre els punts interiors al forat i els exteriors, no hi podrà haver relació causal entre ells.

La mètrica de Robertson-Walker ([4, 6], mateixes seccions on parlen d'inflació), per altra banda, pressuposa el principi Copernicà d'univers isòtrop i homogeni espacialment per descriure'l tot sencer com una varietat producte de la forma $I \times S$, amb

I un obert de \mathbb{R} i S una varietat connexa de 3 dimensions. La mètrica d'aquesta varietat és:

$$g = dt^2 + f^2(t)d\sigma^2, \quad (2.22)$$

on $f(t)$ s'anomena factor d'escala. El model de Friedmann d'aquesta mètrica suposa que el tensor de moment-energia donat per la distribució de galàxies com a partícules té forma de pols ($T_{00} = \rho > 0$, la densitat de massa, i els altres components nuls). Aquesta descripció posa els fonaments per explicar les observacions de Hubble, el 1929, que les galàxies s'allunyaven a una velocitat proporcional (per $H_0 > 0$, la constant de Hubble) a la seva distància. Aquesta descripció no té sentit en la visió de l'espai-temps com a varietat, però en termes del model de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) es correspon al valor de $f'(t_0)/f(t_0)$, i implica l'expansió de l'univers.

3 Ones gravitatòries

En el moment de publicació de la relativitat general, Einstein ja havia percebut que el concepte d'ones gravitacionals tenia sentit, com a mínim, a nivell teòric. Què ho indicava? La principal dificultat de les equacions de la relativitat és la seva no linealitat. Així doncs, a part de les poques solucions analítiques que es coneixen, i en l'absència d'aparells de computació amb les capacitats actuals, un acostament al problema era la linealització de les equacions. En aquesta situació, les equacions es poden reformular fins a trobar que les pertorbacions h d'un tensor mètric pla es comporten com una ona. Veiem pas a pas com podem arribar a aquesta conclusió.

Cal mencionar que a partir d'ara prendrem la convenció habitual en física que els índexs escrits amb lletres gregues van del 0 al 3: l'índex 0 corresponent a la coordenada temporal de la nostra varietat de Lorentz de dimensió 4 i els índexs de l'1 al 3 a les coordenades espacials; mentre que els índexs de l'1 al 3 seran lletres llatines. Excepte en les últimes equacions de l'apartat **2.2**, fins ara havíem utilitzat índexs llatins ja que, en general, no hi havia referències a la dimensió de la varietat que tractàvem.

3.1 Linealització de l'equació d'Einstein

Quan hem presentat el tensor mètric i el tensor de curvatura ens hem centrat en el seu comportament com a tensors, però també hem vist les seves expressions per components en les equacions 1.11 i 1.4. Podem usar-les per reescriure les equacions d'Einstein a partir d'una mètrica que és una pertorbació petita de la mètrica de Minkowski (recordem el principi de la secció 2.2) d'un espai pla. Concretament:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + \mathcal{O}(h_{\mu\nu}^2) \approx \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (3.1)$$

Observem que la simetria dels tensors mètrics g i η implica la simetria de h . Requerirem que la pertorbació compleixi $\lim_{n \rightarrow \infty} h^n = 0$ i que sigui prou petita per negligir tots els termes d'ordre 2 o més en h a les expressions següents. Si hem de treballar amb tensors haurem de conèixer l'invers del nostre tensor mètric $g^{\mu\nu}$ en funció de la pertorbació. Per trobar-lo, aprofitarem la seva expressió matricial i utilitzem que per una matriu A que compleixi $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = 0$ es compleix

$$(1 + A)^{-1} = 1 - A + A^2 - A^3 + \dots$$

Així, com que podem expressar $g = \eta(\mathbf{I} + \eta^{-1}h)$ (amb \mathbf{I} la matriu identitat) i veure que l'invers és $g^{-1} = (\mathbf{I} + \eta^{-1}h)^{-1}\eta^{-1}$, podem prendre $A = \eta^{-1}h$ i tenim que les condicions sobre h i $\eta^2 = \mathbf{I}$ ens permeten substituir-hi l'expansió anterior. Fins a ordre 1 sobre h , doncs, resultarà:

$$g \approx (\mathbf{I} - \eta^{-1}h)\eta^{-1} = \eta^{-1} - \eta^{-1}h\eta^{-1}.$$

Els seus components, que és el que més utilitzarem, seran doncs:

$$g^{\mu\nu} \approx \eta^{\mu\nu} - \eta^{\mu\rho}h_{\rho\sigma}\eta^{\sigma\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}.$$

Utilitzant ara 1.4 amb l'expressió pertorbativa de g tenim:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\nu}^\rho &\approx \frac{1}{2}(\eta^{\rho\lambda} - h^{\rho\lambda})\left(\partial_\mu(\eta_{\nu\lambda} + h_{\nu\lambda}) + \partial_\nu(\eta_{\lambda\mu} + h_{\lambda\mu}) - \partial_\lambda(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})\right) = \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\rho\lambda}(\partial_\mu h_{\nu\lambda} + \partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial_\lambda h_{\mu\nu}),\end{aligned}\quad (3.2)$$

traient tots els termes d'ordre > 1 en la segona igualtat i utilitzant que la mètrica plana no varia sota les derivades parcials. El càlcul d'aquesta expressió també justifica que operem amb la mètrica de Minkowski a l'hora d'interactuar amb els índexs dels tensors, això és, quan usem el tensor mètric per identificar formes i vectors com a duals, ja que en tots els casos en què tinguem termes amb dependència d'ordre 1 amb h , considerar la mètrica g en comptes de η només afegeix termes negligibles.

Observant que 3.2 implica que el producte de dos símbols de la connexió serà un terme d'ordre 2 respecte la pertorbació, ens quedem només amb els dos primers termes de 1.11:

$$\begin{aligned}R_{\mu\lambda\nu}^\rho &\approx \partial_\lambda\Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\nu\Gamma_{\mu\lambda}^\rho \approx \frac{1}{2}\partial_\lambda(\eta^{\rho\sigma}(\partial_\mu h_{\nu\sigma} + \partial_\nu h_{\sigma\mu} - \partial_\sigma h_{\mu\nu})) - \frac{1}{2}\partial_\nu(\eta^{\rho\sigma}(\partial_\mu h_{\lambda\sigma} + \\ &+ \partial_\lambda h_{\sigma\mu} - \partial_\sigma h_{\mu\lambda})) = \frac{1}{2}\eta^{\rho\sigma}(\partial_\lambda\partial_\mu h_{\nu\sigma} + \partial_\nu\partial_\sigma h_{\mu\lambda} - \partial_\lambda\partial_\sigma h_{\mu\nu} - \partial_\nu\partial_\mu h_{\lambda\sigma}).\end{aligned}\quad (3.3)$$

La contracció apropiada entre índexs utilitzant la mètrica η ens donarà l'expressió del tensor de Ricci:

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu} &= \eta_\rho^\lambda R_{\mu\lambda\nu}^\rho \approx \frac{1}{2}\eta^{\lambda\sigma}(\partial_\lambda\partial_\mu h_{\nu\sigma} + \partial_\nu\partial_\sigma h_{\mu\lambda} - \partial_\lambda\partial_\sigma h_{\mu\nu} - \partial_\nu\partial_\mu h_{\lambda\sigma}) = \\ &= \frac{1}{2}(\eta^{\lambda\sigma}(\partial_\lambda\partial_\mu h_{\nu\sigma} + \partial_\nu\partial_\sigma h_{\mu\lambda}) - \square h_{\mu\nu} - \partial_\nu\partial_\mu \mathbf{h}),\end{aligned}\quad (3.4)$$

on hem utilitzat l'expressió $\square = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$, conegut com operador d'Alembert o operador d'ona, i la traça $\text{tr } h$, que denotarem \mathbf{h} i es correspon a $\mathbf{h} = h_\mu^\mu$. Per poder expressar l'equació de gravitació només ens queda calcular la curvatura escalar:

$$R = \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\lambda\partial_\mu h^{\lambda\mu} + \partial_\nu\partial_\sigma h^{\nu\sigma} - \square h_\nu^\nu - \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu \mathbf{h}) = \partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu} - \square \mathbf{h}. \quad (3.5)$$

Ara ja podem expressar l'equació de gravitació que hem trobat a la secció anterior en termes de la pertorbació h que estudiem.

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\eta^{\sigma\rho}(\partial_\sigma\partial_\mu h_{\nu\rho} + \partial_\nu\partial_\sigma h_{\mu\rho}) - \square h_{\mu\nu} - \partial_\nu\partial_\mu \mathbf{h} - n_{\mu\nu}(\partial_\rho\partial_\lambda h^{\rho\lambda} - \square \mathbf{h})) = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (3.6)$$

Més endavant igualarem el tensor d'Einstein a 0. El motiu és que la mètrica que volem tractar es correspon a la noció d'una ona gravitatòria (tot i que encara no hem vist que la pertorbació h tingui efectivament un comportament ondulatori) que es desplaça a través de l'espai. En aquesta cas, la millor aproximació al tensor moment-energia que hem de considerar és 0, degut a la poca densitat de partícules de l'univers. De fet, és només a escales galàctiques o per sistemes de cossos celestes

(com una estrella o el sistema solar) que es consideren altres aproximacions del tensor. Malgrat això, el desenvolupament que ara farem per arribar a l'equació d'ona i solucionar-la és general fins a l'últim pas, on triarem una referència adequada. Al final veurem breument que una referència diferent ens permet utilitzar el tractament ondulatori també quan tenim l'equació no homogènia ($T_{\mu\nu} \neq 0$), que és rellevant per estudiar com un sistema del qual coneixem el tensor pot *generar* ones gravitacionals.

Abans de relacionar explícitament l'equació amb un moviment ondulatori necessitem dues eines més. La primera és una reinterpretació per components del nostre tensor mètric h i la reescriptura de les equacions; la segona, que expandirem en la següent secció, és l'ús de difeomorfismes pròxims a la identitat per veure que en l'aproximació lineal podem fixar condicions addicionals sobre la nostra pertorbació h (talment com si tinguéssim llibertat de gauge en el nostre tensor mètric i en triéssim un). Podem trobar formulacions d'aquestes tries de gauge directament sobre el tensor h , com en l'article [1]. Però un cop haguem vist la naturalesa de les components, entendre com hi actuen les restriccions mostrarà més clarament què és el que estem imposant.

Les components de h que considerarem es corresponen a les peces que, sota rotacions espacials, resten invariants. Concretament, tenim que les rotacions espacials transformen h_{00} com un escalar, h_{0i} com un vector i h_{ij} com un tensor (0,2) simètric. En efecte, de la descripció per coordenades d'un tensor mètric qualsevol $g_{\mu\nu}$ i el seu comportament sota transformacions restringides en les coordenades espacials, que hauran de complir:

$$\frac{\partial x^i}{\partial x'^0} = \frac{\partial x^0}{\partial x'^j} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial x^0}{\partial x'^0} = 1.$$

resultarà que cada component del tensor original $g_{\mu\nu}$ aportarà a $g'_{\lambda\rho}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^0}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^0}{\partial x'^\rho} g_{00} &= \delta_\lambda^0 \delta_\rho^0 g_{00} \quad , \quad \frac{\partial x^0}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^i}{\partial x'^\rho} g_{0i} = \delta_\lambda^0 \delta_\rho^m \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} g_{0i}, \\ \frac{\partial x^i}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^j}{\partial x'^\rho} g_{ij} &= \delta_\lambda^m \delta_\rho^n \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x^j}{\partial x'^n} g_{ij}. \end{aligned}$$

que per simetria de g serveix també per g_{i0} . Així doncs, les deltes que apareixen faran que cada component del tensor nou només depengui del component corresponent del tensor anterior:

$$g'_{00} = g_{00} \quad , \quad g'_{0m} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} g_{0i} \quad , \quad g'_{mn} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x^j}{\partial x'^n} g_{ij}.$$

Ara podem donar nom a aquestes components i veure quin significat físic tenen.

Definició 3.1. *Les expressions del camp escalar, vectorial i tensorial són, respectivament:*

$$h_{00} = -2\Phi \quad , \quad h_{0i} = w_i \quad , \quad h_{ij} = 2s_{ij} - 2\Psi\delta_{ij}. \quad (3.7)$$

on $\Psi = -\frac{1}{6}\delta^{ij}h_{ij}$ és un escalar amb la informació de la traça de h_{ij} de manera que s_{ij} no té traça.

En efecte, aïllant s_{ij} de la seva definició i substituint l'expressió de Ψ veiem que

$$\eta^{ij}s_{ij} = \frac{1}{2}\left(\eta^{ij}h_{ij} - \frac{1}{3}\eta^{ij}\delta_{ij}\delta^{mn}h_{mn}\right) = \frac{1}{2}(\mathbf{h} - \mathbf{h}) = 0,$$

ja que el sumatori implícit implica $\eta^{ij}\delta_{ij} = 3$.

Si volem posar de manifest la rellevància d'aquestes magnituds, és útil considerar l'equació geodèsica d'una partícula que es mou a l'espai. El fet que estiguem en una varietat Lorentziana M posa certes dificultats a l'ús de conceptes habituals com trajectòria, velocitat o posició relativa. Tot i que ja n'hem parlat, ara necessitem les definicions formals, que també seran útils per a la descripció que farem a l'última secció del comportament de les partícules sota ones gravitacionals.

Definició 3.2. *Anomenarem partícula material a una corba $\alpha : I \Rightarrow M$ que sigui temporal i direcció al futur, i que compleixi $|\alpha'(\tau)| = 1 \forall \tau \in I$. La parametrització de la corba τ s'anomena temps propi.*

El temps propi de la partícula material es correspon al temps que mesura ella per tots els esdeveniments que observa (el qual no serà el mateix en general per altres partícules materials), i coincideix amb la parametrització per l'arc de la corba. L'adjectiu material serveix per diferenciar-les de les partícules lumíniques com, és clar, els fotons.

Definició 3.3. *Anomenarem partícula lumínica a una geodèsica nul·la i en direcció al futur $\gamma : I \Rightarrow M$.*

Que les partícules lumíniques segueixen geodèsiques és una de les afirmacions de la teoria de la relativitat. Les partícules materials, en canvi, poden experimentar 'forces' si tenen una acceleració no nul·la en el sentit covariant, o sigui quan $\nabla_{\alpha'}\alpha' \neq 0$. En la resta de casos, direm que estan en caiguda lliure.

Definició 3.4. *Segui una partícula material de corba γ . Si γ és una geodèsica de M , és a dir, $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$, direm que és una partícula material en caiguda lliure.*

Definició 3.5. *Si $\alpha : I \Rightarrow M$ és una partícula material, el seu moment associat serà el camp vectorial $P = m d\alpha/d\tau(x)$ tal que $x \in \alpha(I)$, on m serà la massa de la partícula. Al moment associat també se l'anomena vector (o camp vectorial) de moment-energia.*

Així, podem prendre un punt P qualsevol de la varietat de coordenades locals x_μ , on situarem una partícula material en caiguda lliure amb el moment associat p^μ i massa m , de manera que $p^0 = m \frac{dt}{d\tau} = E$ i $p^i = E v^i$, on v^i és la velocitat en les coordenades espacials (cap. 6 de [4]). Com hem mencionat, si la partícula material està en caiguda lliure vinculem el concepte de trajectòria de la partícula a la geodèsica definida pel punt P i el vector associat al moment p . Així doncs, p^μ haurà de complir 1.6:

$$\frac{dp^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu p^\rho p^\sigma = 0.$$

Substituint-ho a l'expressió 3.2 podem trobar els símbols de Christoffel:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu 0}^0 &= \partial_\mu \Phi \quad , \quad \Gamma_{00}^i = \partial_0 w^i - \partial^i \Phi \quad , \quad \Gamma_{j0}^i = \frac{1}{2}(\partial_j w^i - \partial^i w_j) + \frac{1}{2}\partial_0 h_j^i \\ \Gamma_{jk}^0 &= -\frac{1}{2}(\partial_j w_k + \partial_k w_j) + \frac{1}{2}\partial_0 h_{jk} \quad , \quad \Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}(\partial_j h_k^i - \partial_k h_j^i) - \frac{1}{2}\partial^i h_{jk}.\end{aligned}\quad (3.8)$$

Per veure la gravetat com una força només cal desfer la interpretació geodèsica de l'equació, aïllant el diferencial del moment. Amb les expressions que acabem de trobar i recordant la relació de p^0 , la part espacial del moment p^i ha de complir:

$$\begin{aligned}\frac{dp^i}{dt} &= -\frac{1}{E}\Gamma_{\mu\nu}^i p^\mu p^\nu = \\ &= -E\left[(\partial^i \Phi + \partial_0 w^i) + (\partial^i w_j - \partial_j w^i)v^j + (2\partial_0 h_j^i)v^j + \frac{1}{2}(\partial_j h_k^i + \partial_k h_j^i - \partial^i h_{jk})v^j v^k\right].\end{aligned}\quad (3.9)$$

Aquí ja hem agrupat els termes pensant en la següent substitució:

$$G^i \equiv -\partial^i \Phi - \partial_0 w^i,$$

$$H^i \equiv (\nabla \times w)^i = \epsilon^{ijk}\partial_j w_k \implies (v \times H)^i = \epsilon^{ijk}v_j(\epsilon_{mnk}\partial^m w^n) = (\partial^i w_j - \partial_j w^i)v^j,$$

on hem utilitzat la igualtat $\epsilon^{ijk}\epsilon_{mnk} = \delta_m^i\delta_n^j - \delta_n^i\delta_m^j$ sobre el símbol de Levi-Civita definit anteriorment, i que en la contracció de dos índexs es poden intercanviar la posició. En definitiva, trobem que l'escalar Φ i el vector w^i defineixen dos magnituds vectorials, el camp vectorial "gravitoelèctric" G i el "gravitomagnètic" H , de la mateixa manera que el potencial escalar ϕ i el potencial vectorial A^i en electromagnetisme defineixen els camps elèctric i magnètic; per això es manifesten igual que en l'expressió de la força de Lorentz $F = q(E + v \times B)$. L'estudi d'aquests fenòmens és el camp del gravitomagnetisme, i és útil sempre que els termes relacionats amb les altres components del tensor mètric siguin negligibles. Això es dona per a velocitats petites, ja que aquests altres termes tenen precisament una dependència quadràtica amb la velocitat.

Acabem de veure que el component escalar Φ contribueix al fenomen del gravitomagnetisme, però també està relacionat amb la gravitació de Newton. Recordem que aquesta teoria de la gravitació és una teoria de camp escalar, en la qual el potencial obeeix l'equació de Poisson $\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho$. Avancem un moment les equacions modificades d'Einstein (3.15) que trobarem a continuació per justificar que tots dos potencials s'identifiquin amb el mateix caràcter. La teoria de Newton suposa un tensor moment-energia tipus pols, això és, $T_{00} = \rho$ i els altres components nuls, i busca una solució estàtica. Les equacions sense derivades temporals seran

$$\nabla^2 \Psi = 4\pi G\rho \quad , \quad \nabla^2 w_i = 0 \quad , \quad (\delta_{ij}\nabla^2 - \partial_i\partial_j)(\Phi - \Psi) - \nabla^2 s_{ij} = 0.$$

Després veurem amb més detall que per unes condicions de contorn convenientes una equació tipus $\nabla^2 f = 0$ implica $f = 0$. Així, la segona equació implica $w_i = 0$, i la traça de l'última equació, com que $tr(s_{ij}) = 0$, $2\nabla^2(\Phi - \Psi) = 0 \implies \Phi = \Psi$. En conseqüència, tenim $\nabla^2 s_{ij} = 0 \implies s_{ij} = 0$. En definitiva, la mètrica pertorbada és

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1 - 2\Phi, 1 - 2\Phi, 1 - 2\Phi, 1 - 2\Phi),$$

i Φ obeeix l'equació de Poisson en ser igual a Ψ , deixant clara la relació amb el potencial de Newton. A la secció 7.3 de [6] podem veure amb més detall com aquesta descripció ens permet recuperar les altres propietats de la mecànica de Newton i a més alguns efectes relativistes com la curvatura de la llum sota la gravetat.

Finalment, la component h_{ij} està lligada als fenòmens ondulatoris que volem estudiar, com veurem tot seguit. En la nostra descripció de h només ens importarà el seu component tensorial, s_{ij} , que s'anomena "strain" en anglès. Nosaltres proposem anomenar-lo tensor d'esforç, però hi ha poca literatura al respecte.

Les equacions del tensor d'Einstein queden modificades de la següent manera quan substituïm les components a 3.6, recordant que $\mathbf{h} = \text{tr}(h)$. Observem també que amb el conveni d'índexs que usem, $\eta^{ij} = \delta^{ij}$.

$$\begin{aligned}
G_{00} &= \frac{1}{2} \left(2\partial_\sigma \partial_0 h_0^\sigma - \partial_0 \partial_0 \mathbf{h} - \square h_{00} - \eta_{00} \partial_\rho \partial_\lambda h^{\rho\lambda} + \eta_{00} \square \mathbf{h} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(2(\partial_0 \partial_0 h_0^0 + \partial_i \partial_0 h_0^i) - \partial_0 \partial_0 \eta^{00} h_{00} - \partial_0 \partial_0 \eta^{ij} h_{ij} - \eta_{00} \partial_0 \partial_0 h_{00} - \right. \\
&\quad - \eta^{ij} \partial_i \partial_j h_{00} - \eta_{00} \partial_0 \partial_0 h^{00} - \eta_{00} \partial_i \partial_0 h^{i0} - \eta_{00} \partial_0 \partial_0 h^{0i} - \eta_{00} \partial_i \partial_j h^{ij} + \\
&\quad \left. + \eta_{00} \eta^{00} \partial_0 \partial_0 \eta^{00} h_{00} + \eta_{00} \eta^{ij} \partial_i \partial_j \eta^{00} h_{00} + \eta_{00} \eta^{00} \partial_0 \partial_0 \eta^{ij} h_{ij} + \eta_{00} \eta^{ij} \partial_i \partial_j \eta^{mn} h_{mn} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left[\partial_i \partial_j \left(h^{ij} - \eta^{ij} \eta^{mn} h_{mn} \right) \right] = \partial_i \partial_j \left((s^{ij} - \Psi \delta^{ij}) + 3\Psi \delta^{ij} \right) = \partial_i \partial_j s^{ij} + 2\nabla^2 \Psi.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Separant els índexs espacials del temporal de forma similar i substituint les components trobem les altres equacions. Hem de tenir en compte que amb la definició $w_i = h_{0i}$ resulta $w^i = h_0^i = -h^{0i}$, que el terme s no té traça ($s_k^k = 0$) i que $\delta_i^i = 3$:

$$G_{0j} = \frac{1}{2} \partial_k \partial_j w^k - \frac{1}{2} \nabla^2 w_j + \partial_0 \partial_k s_j^k + 2\partial_0 \partial_j \Psi, \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
G_{ij} &= \left(\delta_{ij} \nabla^2 - \partial_i \partial_j \right) (\Phi - \Psi) + \delta_{ij} \partial_0 \partial_k w^k - \frac{1}{2} \left(\partial_0 \partial_i w_j + \partial_0 \partial_j w_i \right) + \\
&\quad + 2\delta_{ij} \partial_0^2 \Psi - \square s_{ij} + \partial_k \partial_i s_j^k + \partial_k \partial_j s_i^k - \delta_{ij} \partial_k \partial_l s^{kl}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

La propera secció justificarà l'existència d'un canvi de referència que permeti imposar les condicions següents. De moment, però, veiem quines són i com modifiquen les equacions.

$$\begin{aligned}
\partial_i s^{ij} &= 0, \\
\partial_i w^i &= 0.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Aquestes condicions sobre la pertorbació se solen anomenar gauge o referència transversa. Més tard tractarem la pertorbació com una ona plana de velocitat de propagació k_i ; el nom ens indica doncs h serà transversa a aquesta direcció de propagació. Per demostrar-ho hem d'aplicar la teoria de transformades de Fourier sobre la condició $\partial_i w^i$ (el lector que no hi estigui familiaritzat en pot trobar una introducció al capítol 7 de [3]) i avançar la forma d'una ona plana que veurem després.

Proposició 3.6. *Siguin els tensors $s^{ij}(x) = s^{ij}e^{2\pi i \hat{\mathbf{k}}_i x^i}$ i $w^i(x) = w^i e^{2\pi i \hat{\mathbf{k}}_i x^i}$. Si es compleix l'equació 3.13, aleshores $\mathbf{k}_i \cdot s^{ij} = \mathbf{k}_i \cdot w^i = 0$.*

Prova: Una de les propietats de les transformades de Fourier és $\widehat{\partial_i w^i} = 2\pi i k_i \hat{w}^i$. Si expandim en sèrie de Fourier $\partial_i w^i$, tenim

$$\partial_i w^i = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\partial_i w^i} e^{2\pi i k_j x^j} dk = \int_{\mathbb{R}^n} 2\pi i k_j \hat{w}^j e^{2\pi i k_j x^j} dk.$$

Com que l'expansió de $w^i(x) = w^i e^{2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$ és $\int \hat{w}^i(k) e^{2\pi i k x} dk$, sigui la delta de Dirac $\delta(k - \mathbf{k})$ definida per l'acció $\int \delta(k - \mathbf{k}) f(k) = f(\mathbf{k})$, veiem que $\hat{w} = w^i \delta(k - \mathbf{k})$ compleix les condicions, per tant

$$\partial_i w^i = 2\pi i \int_{\mathbb{R}^n} k_i e^{2\pi i k_j x^j} w^i \delta(k - \mathbf{k}) dk = 2\pi i \mathbf{k}_i w^i e^{2\pi i \mathbf{k}_i x^i}.$$

Si això s'anul·la per qualsevol punt de la varietat, per força $\mathbf{k}_i w^i = 0$. La demostració per a s^{ij} és idèntica si canviem els índexs amb cura. \square

Val a dir que la delta de Dirac no és una funció, sinó una distribució. Un tractament més rigorós de la prova ha d'especificar que la transformada \hat{w}^i és una forma definida pel seu producte escalar sobre funcions en l'espai de funcions integrables, com veurem en les definicions de l'apartat 3.3. Malgrat aquest matís, es pot comprovar que les igualtats es compleixen tal com apareixen a la prova. Ara podem utilitzar les equacions següents a més de 3.13 :

$$\mathbf{k}_i s^{ij} = \mathbf{k}_i w^i = 0. \quad (3.14)$$

És immediat veure quins termes s'anul·len a les equacions 3.10, 3.11 i 3.12. Les equacions, cada una igualada al component corresponent de $8\pi G T_{\mu\nu}$, seran:

$$\begin{aligned} G_{00} &= 2\nabla^2 \Psi, \\ G_{0j} &= -\frac{1}{2} \nabla^2 w_j + 2\partial_0 \partial_j \Psi, \\ G_{ij} &= \left(\delta_{ij} \nabla^2 - \partial_i \partial_j \right) (\Phi - \Psi) - \frac{1}{2} \left(\partial_0 \partial_i w_j + \partial_0 \partial_j w_i \right) + 2\delta_{ij} \partial_0^2 \Psi - \square s_{ij}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

L'últim pas és substituir $T_{\mu\nu} = 0$. Si considerem que la pertorbació es comporta bé en tot el nostre espai (incloent que no divergeixi quan s'acosta a la vora), l'única solució de les equacions de la forma $\nabla^2 f = 0$ per f un component de la pertorbació són f constant. Tindrà sentit per a la nostra pertorbació considerar 0 aquesta constant, ja que si no la podríem assimilar en el tensor mètric que pertorbem i canviar les coordenades per recuperar la mètrica plana (cosa que podem fer localment). Això ens és útil per resoldre terme a terme 3.15:

$$\begin{aligned} G_{00} = 0 &\implies \nabla^2 \Psi = 0 \implies \Psi = 0, \\ G_{0j} = 0 \ \&\ \Psi = 0 \implies \nabla^2 w_j = 0 \implies w_j = 0, \\ G_{ij} = 0 \ \&\ \Psi = 0 \ \&\ w_j = 0 &\implies \delta_{ij} \nabla^2 \Phi - \square s_{ij} = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Amb la propietat que la traça de s és 0, veiem que l'última equació implica que

$$G_i^i = 3\nabla^2\Phi - \square s_i^i = 0 \implies \nabla^2\Phi = 0,$$

i amb el mateix raonament que abans $\Phi = 0$. Així doncs, $\square s_{ij} = 0$, i resulta que la pertorbació del nostre tensor en la referència transversa, que anomenarem h^{TT} , compleix l'equació d'ones tal com esperàvem trobar:

$$h_{\mu\nu}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & 2s_{ij} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = 0 \quad \text{i} \quad \square h_{\mu\nu}^{TT} = 0. \quad (3.17)$$

Com hem mencionat, hi ha una altra referència rellevant que podem prendre. La que hem escollit ens ha permès tractar els components del tensor mètric i veure què representen, però per recuperar l'equació d'ona hem hagut d'imposar $T_{\mu\nu} = 0$. Si en canvi imposem

$$\partial^\mu h_{\mu\alpha} = \frac{1}{2}\partial_\alpha \mathbf{h}, \quad (3.18)$$

i la substituïm a l'expressió 3.6, trobem l'expressió simplificada

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &\approx \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \partial^\rho h_{\nu\rho} + \partial_\nu \partial^\rho h_{\mu\rho} - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu \mathbf{h} - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\lambda h^{\rho\lambda} + \eta_{\mu\nu} \square \mathbf{h} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \frac{1}{2} \partial_\nu \mathbf{h} + \partial_\nu \frac{1}{2} \partial_\mu \mathbf{h} - \partial_\mu \partial_\nu \mathbf{h} - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \frac{1}{2} \partial^\rho \mathbf{h} + \eta_{\mu\nu} \square \mathbf{h} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \square \left(-h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \mathbf{h} \right), \end{aligned}$$

on hem utilitzat que 3.18 també implica $\partial_\mu h^{\mu\alpha} = \eta^{\alpha\beta} \partial^\mu h_{\mu\beta} = \eta^{\alpha\beta} \frac{1}{2} \partial_\beta \mathbf{h} = \frac{1}{2} \partial^\alpha \mathbf{h}$. Si ara observem que l'equació d'Einstein 2.20 (substituint el coeficient per χ) implica:

$$tr(G_{\mu\nu}) = tr(\chi T_{\mu\nu}) \Rightarrow tr(R_{\mu\nu}) - \frac{1}{2} R tr(\eta_{\mu\nu}) = \chi tr(t_{\mu\nu}) \Rightarrow -R = \chi tr(T),$$

tenim que podem reescriure-la com:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2} R \eta_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu} - \chi tr(T) \eta_{\mu\nu} = \chi \left(T_{\mu\nu} - tr(T) \eta_{\mu\nu} \right).$$

Com que $tr(G_{\mu\nu}) = 1/2 \square (-\mathbf{h} + 1/2 \eta^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} \mathbf{h}) = 1/2 \square \mathbf{h}$, podem reescriure l'expressió anterior amb la dependència de \mathbf{h} :

$$R_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} tr(G_{\mu\nu}) = \frac{1}{2} \square \left(-h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \mathbf{h} \right) - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \square \mathbf{h} = -\frac{1}{2} \square h_{\mu\nu}.$$

Això vol dir que la nostra equació d'Einstein es pot escriure com

$$\square h_{\mu\nu} = -2\chi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} tr(T) \right). \quad (3.19)$$

La dreta de la igualtat només depèn del tensor moment-energia, així que efectivament la pertorbació h obeeix una equació d'ona no homogènia quan $T_{\mu\nu} \neq 0$.

3.2 Tria d'una referència o gauge

Per definir difeomorfismes pròxims a la identitat, podem utilitzar un transport per geodèsiques a través de camps vectorials propers a zero. Si volguéssim fer-ho a tota la varietat M , hauríem de suposar que és completa per geodèsiques. Ja hem comentat que l'estructura de l'univers és una varietat de Lorentz segons la relativitat general, però la completesa geodèsica n'és una propietat més complicada. Com podem veure en [6](secció 5.6) amb detall, podem trobar singularitats en la mètrica de l'univers que en contradiuen la completesa: els forats negres que hem mencionat a la secció 2.3. Malgrat això, les geodèsiques s'estenen bé lluny de les singularitats; en la suposició que el camp gravitatori és prou petit per tractar-lo de forma pertorbativa ens situem lluny de qualsevol singularitat implícitament, i per tant podem donar per vàlida la suposició de completesa en un entorn del punt que estudiem. En particular, serà un entorn prou gran per l'escala de la mesura que veurem al final. Per el propi caràcter aproximat de les equacions que utilitzem, tampoc ens preocuparà que el difeomorfisme deixi d'estar ben definit lluny de la regió que estudiem.

Així, a un camp vectorial ξ arbitràriament petit hi associem el difeomorfisme f_ξ :

$$\begin{aligned} f_\xi : M &\Longrightarrow M, \\ x &\Rightarrow \gamma_\xi(1, x) = \gamma_{x,\xi}(1). \end{aligned} \tag{3.20}$$

La corba $\gamma_{x,\xi}(t) = \gamma_\xi(t, x)$ representa la geodèsica unívocament definida per $\gamma(0) = x$ i $\dot{\gamma}(0) = \xi$, que estarà ben definida en un entorn de 0 i, si cal, podem triar ξ més petit per tal que l'interval I de γ contingui 1. Volem veure quin efecte té aquest difeomorfisme sobre la mètrica pertorbada $g' = g + h$; hem de veure doncs l'expressió de la mètrica 'després' d'aplicar el difeomorfisme, la qual denotarem g'_ξ , en termes també pertorbatius $g'_\xi = g + h_\xi$. Per fer-ho haurem d'utilitzar la derivada de Lie.

Definició 3.7. *Sigui una varietat M i un camp vectorial ξ . Donat un punt x , un interval obert I_0 de \mathbb{R} que conté el 0 i un obert $U \subset M$ que conté x , la corba integral per ξ amb condició inicial x és l'aplicació*

$$\alpha_{\xi,x} : I_0 \Rightarrow U,$$

que és solució del sistema d'equacions diferencials $\alpha(0) = x$ i $\alpha'(t) = d/dt(\alpha) = \xi(\alpha(t))$. Sigui ara x_0 de U i $U_0 \subset U$ un entorn de x_0 , anomenarem flux local sobre ξ a x_0 a l'aplicació

$$\sigma_\xi : I_0 \times U_0 \Rightarrow U,$$

tal que $\sigma_\xi(t, x) = \alpha_{\xi,x}(t)$ on α és una corba integral.

Les corbes integrals estan definides de forma unívoca per a algun I_0 (per tant de forma local) sempre que el camp vectorial sigui contínuament derivable (de fet, pel teorema de Picard–Lindelöf, amb hipòtesis menys restrictives també és cert), com es pot deduir de resultats principals d'equacions diferencials ordinàries. D'aquí en podem deduir la unicitat del flux. És també senzill veure que la unicitat de les

corbes integrals implica $\sigma_\xi(t, \sigma_\xi(s, x)) = \sigma_\xi(t + s, x)$, és a dir, que els fluxos formen un grup commutatiu amb la relació $\sigma_\xi^{-1}(t) = \sigma_\xi(-t)$. Aquesta noció de flux i la última identitat és suficient per definir una noció de derivada en una varietat M sense necessitat de cap estructura geomètrica. Observem que quan tenim una estructura geomètrica definida, podem utilitzar les geodèsiques com a corbes integrals, i per tant el concepte de flux és un generador infinitesimal dels difeomorfismes 3.20.

Definició 3.8. *En una varietat M dotada d'un camp tensorial T de tipus (p, q) i un camp vectorial ξ , sigui σ_ξ el flux associat, anomenarem derivada de Lie $L_\xi T$ al camp tensorial tipus (p, q) que compleix:*

$$(L_\xi T)_x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(d(\sigma_\xi(-t)) \circ T \circ \sigma_\xi(t)|_x - T_x \right),$$

on $d(f)$ és l'aplicació diferencial associada a $f : M \Rightarrow N$, que sobre una funció escalar és la identitat, i sigui $V \in T_p M$, $\omega \in T_{f(p)}^* N$ en vectors i formes és, respectivament:

$$\begin{aligned} f_* : T_p M &\Rightarrow T_{f(p)} N \text{ tal que } f_* V[\omega] = V[\omega \circ f], \\ f^* : T_{f(p)}^* N &\Rightarrow T_p^* M \text{ tal que } (f^* \omega)[V] = (f_* V)[\omega]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

A partir de la definició podem veure que $L_\xi f$ amb f una funció escalar és la derivada direccional ξf . Veure l'efecte sobre un camp vectorial η requereix tractar amb cura l'aplicació diferencial $d(\sigma_\xi(-t))$, però és directe trobar $L_\xi \eta = [\xi, \eta] = \xi \eta - \eta \xi$ (la prova de la proposició següent pot servir d'ajut). Es pot veure que la derivada de Lie també és una derivada tensorial (def. 1.10) i per tant commuta amb la contracció, així que podem descriure l'acció de L_ξ sobre qualsevol tensor (p, q) sense dificultats de manera similar a 1.3. Pel tensor mètric:

$$\begin{aligned} L_\xi(g(X, Y)) &= (L_\xi g)(X, Y) + g(L_\xi X, Y) + g(X, L_\xi Y) \quad \text{i} \quad L_\xi(g(X, Y)) = \xi g(X, Y) \\ &\implies \xi g(X, Y) - g([\xi, X], Y) - g(X, [\xi, Y]) = (L_\xi g)(X, Y). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Proposició 3.9. *La relació entre les pertorbacions h de g' i h_ξ de g'_ξ és*

$$h_\xi \approx h - L_\xi g'. \quad (3.23)$$

Prova: Com que a 3.20 hem descrit difeomorfismes infinitesimals, podem suposar un camp ξ prou petit perquè l'expansió de Taylor de la corba de 3.20 avaluada a $t=1$ sigui aproximadament correcta només amb el primer terme; els termes que descartarem no seran per l'ordre de t sinó per ser d'ordre ξ^2 o superior. Cada component α de la corba serà:

$$\gamma_\xi^\alpha(1, x) = \gamma_\xi^\alpha(0, x) + (\gamma')_\xi^\alpha(0, x)(1 - 0) + \mathcal{O}(\gamma'),$$

agrupant al final els termes d'ordre superior a γ' . D'ara endavant ometrem l'argument t , que és constant $t=1$. Usant que la definició de $\gamma_{x,\xi}$ ens dona el valor de la seva derivada ξ a $t = 0$, l'expansió anterior i la de $\gamma_{x,\xi}^{-1}$ seran:

$$(\gamma_{x,\xi}^{-1})^\alpha = x^\alpha - \xi^\alpha(x) + \mathcal{O}(\xi), \quad (\gamma_{x,\xi})^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha(x) + \mathcal{O}(\xi).$$

Per veure les components de la mètrica g'_ξ , hem de desenvolupar la seva expressió formal. Com que podem interpretar l'expressió de g'_ξ sobre dos camps vectorials qualssevol com la mètrica g' sobre els seus vectors antiimatge pel difeomorfisme, haurem de desenvolupar $(f_\xi^{-1})^*g'$ amb les definicions de 3.21:

$$\begin{aligned} ((\gamma_\xi^{-1})^*g')(\partial_\alpha, \partial_\beta)|_x &= g'\left((f_\xi^{-1})_*\partial_\alpha, (f_\xi^{-1})_*\partial_\beta\right)\Big|_{\gamma_\xi^{-1}(x)} \approx g'\left(\partial_\alpha[x^\nu - \xi^\nu]\partial_\nu, \partial_\beta[x^\nu - \xi^\nu]\partial_\nu\right)\Big|_{\gamma_\xi^{-1}(x)} \\ &\approx g'(\delta_\alpha^\nu\partial_\nu, \delta_\beta^\nu\partial_\nu)\Big|_{\gamma_\xi^{-1}(x)} - \partial_\alpha\xi^\nu g'(\partial_\nu, \partial_\beta)\Big|_{\gamma_\xi^{-1}(x)} - \partial_\beta\xi^\nu g'(\partial_\alpha, \partial_\nu)\Big|_{\gamma_\xi^{-1}(x)} + \mathcal{O}(\xi). \end{aligned}$$

Tornant a desenvolupar en sèrie sobre el punt on avaluem la funció, $\gamma_\xi^{-1}(x) \approx x - \xi$, apareixeran nous termes d'ordre superior en ξ , que podem negligir.

$$(g'_\xi)_{\alpha\beta}(x) = g'_{\alpha\beta}(x) - \partial_\alpha\xi^\nu g'_{\nu\beta}(x) - \partial_\beta\xi^\nu g'_{\alpha\nu}(x) + \mathcal{O}(\xi).$$

Recordant que $\nabla_X g(Y, Z)$ amb X, Y, Z camps vectorials arbitraris, resulta que:

$$g([X, Y], Z) = (X^\alpha \partial_\alpha Y^\lambda - Y^\alpha \partial_\alpha X^\lambda) Z^\beta g(\partial_\lambda, \partial_\beta) = -\partial_\alpha X^\lambda g_{\lambda\beta} + X(g(Y, Z)) = -\partial_\alpha X^\lambda g_{\lambda\beta}.$$

Per tant l'expressió de $(g'_\xi)_{\alpha\beta}(x)$, recordant 3.22, és:

$$\begin{aligned} (g'_\xi)_{\alpha\beta}(x) &= g'_{\alpha\beta} - \left(\xi g'_{\alpha\beta} - g'([\xi, \partial_\alpha], \partial_\beta) - g'(\partial_\alpha, [\xi, \partial_\beta]) \right) + \mathcal{O}(\xi) = \\ &= g'_{\alpha\beta} - (L_\xi g')_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(\xi). \end{aligned}$$

Com que $g'_\xi = g + h_\xi$ i $g' = g + h$ l'equació anterior prova la igualtat. \square

Només ens queda relacionar-ho amb la connexió.

Lema 3.10. *En una varietat de Lorentz, sigui g un tensor mètric $(0,2)$ i ∇ la connexió de Levi-Civita, per qualssevol camps vectorials X, Y, Z es compleix:*

$$(L_X g)(Y, Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X). \quad (3.24)$$

Prova: Com que per qualsevol tensor $(0,2)$ la derivada covariant de la connexió ∇ compleix

$$(\nabla_X \alpha)(Y, Z) = X(\alpha(Y, Z)) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z),$$

utilitzant que $\nabla_X Y = \nabla_Y X + [X, Y]$ i $\nabla_X Z = \nabla_Z X + [X, Z]$ (com es pot comprovar directament de la definició de derivada covariant) resulta la identitat

$$X(\alpha(Y, Z)) = (\nabla_X \alpha)(Y, Z) + \alpha(\nabla_Y X, Z) + \alpha([X, Y], Z) + \alpha(Y, \nabla_Z X) + \alpha(Y, [X, Z]).$$

Si substituïm aquesta relació a 3.22, resultarà:

$$(L_X \alpha)(Y, Z) = (\nabla_X \alpha)(Y, Z) + \alpha(\nabla_Y X, Z) + \alpha(Y, \nabla_Z X).$$

Com que el nostre tensor és g i $\nabla_X g = 0$, el primer terme és nul. \square

Proposició 3.11. *La relació entre perturbacions de la proposició anterior en coordenades locals és*

$$(h_\xi)_{\mu\nu} \approx h_{\mu\nu} - \nabla_\mu \xi_\nu - \nabla_\nu \xi_\mu \quad (3.25)$$

Prova: Primer utilitzem el lema anterior en l'equació 3.23 per veure que

$$(g'_\xi)_{\mu\nu}(x) \approx g'_{\mu\nu} - (\nabla'_\mu \xi^\lambda) g'_{\lambda\nu} - (\nabla'_\nu \xi^\lambda) g'_{\mu\lambda}.$$

Observem que la diferència entre ∇'_μ i ∇_μ serà en els símbols de Christoffel de la derivada covariant i, per tant, de primer ordre en la pertorbació h . Això vol dir que $\nabla'_\mu \xi - \nabla_\mu \xi$ serà de l'ordre de $h\xi$ i ho podem negligir. Per altra banda, $g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, i amb el mateix raonament podem negligir el segon terme quan tingui un factor de ξ . Tenim doncs:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} + (h_\xi)_{\mu\nu} &= (g'_\xi)_{\mu\nu} \approx g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - (\nabla_\mu \xi^\lambda)(g_{\lambda\nu} + h_{\lambda\nu}) - (\nabla_\nu \xi^\lambda)(g_{\mu\lambda} + h_{\mu\lambda}) = \\ &= g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \nabla_\mu \xi_\nu - \nabla_\nu \xi_\mu. \end{aligned}$$

□

Es pot comprovar que utilitzant la relació 3.25 en 3.3, $R(h_\xi)^\rho_{\lambda\mu\nu} = R(h)^\rho_{\lambda\mu\nu}$ i per tant també són invariants l'escalar i el tensor de Ricci i el tensor d'Einstein. És destacable que per tal que la substitució sigui coherent, hem d'utilitzar derivades parcials en comptes de derivades covariants; al final de la secció ho justificarem.

Ara que hem vist com afecta el difeomorfisme a la pertorbació de la mètrica h , hauríem de veure que podem trobar un camp vectorial ξ tal que es compleixin les condicions que hem imposat. En primer lloc, substituïm 3.25 a la primera equació de 3.13 i igulem $\nabla_i s^{ij}$ a 0:

$$\begin{aligned} \tilde{s}_{ij} &= \frac{1}{2} \left(h_{ij} - \nabla_i \xi_j - \nabla_j \xi_i \right) - \frac{1}{6} \delta^{kl} \left(h_{kl} - \nabla_k \xi_l - \nabla_l \xi_k \right) \delta_{ij} \implies \\ \nabla_i \tilde{s}^{ij} &= \left(\frac{1}{2} \nabla_i h^{ij} \delta^{ij} - \frac{1}{6} \nabla_i \mathbf{h} \right) - \frac{1}{2} \nabla_i \nabla^i \xi^j - \frac{1}{2} \nabla_i \nabla^j \xi^i + \frac{1}{6} \left(2 \nabla_i \nabla_k \xi^k \right) \delta^{ij} = 0 \implies \\ \nabla^2 \xi^j + \nabla^j \nabla_i \xi^i - \frac{2}{3} \nabla_k \nabla^j \xi^k &= 2 \nabla_i s^{ij} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Hem trobat doncs la condició sobre el vector ξ , però veiem que és només sobre els seus components espacials. Afortunadament, la segona equació de 3.13 només imposa una condició sobre ξ_0 :

$$\begin{aligned} \tilde{w}^i &= \eta^{ij} \tilde{h}_{0j} = \eta^{ij} \left(h_{0j} - \nabla_0 \xi_j - \nabla_j \xi_0 \right) \implies \\ \nabla_i \tilde{w}^i &= \nabla_i w^i - \nabla_i \nabla_0 \xi^i - \nabla_i \nabla^i \xi_0 = 0 \\ \nabla^2 \xi_0 &= \nabla_i w^i - \nabla_i \nabla_0 \xi^i \end{aligned} \quad (3.27)$$

Aquest sistema d'equacions, sense condicions de contorn, té infinites solucions. Per tant, hem demostrat que podem construir una referència tal que l'equació 3.17 sigui equivalent a l'equació aproximada d'Einstein.

Queda per justificar que a l'apartat anterior haguem substituït totes les derivades covariants d'aquestes últimes expressions per derivades parcials. Recordem que estem treballant en l'aproximació lineal, i que a 3.2 hem vist que la connexió no té cap terme d'ordre 0 en h . Així doncs, en les igualtats que hem trobat, cada derivada covariant ∇_μ sobre $h_{\rho\sigma}$ presenta un terme $\partial_\mu h_{\rho\sigma}$ i un altre $-\Gamma_{\mu\rho}^\lambda h_{\lambda\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda h_{\rho\lambda}$; aquest segon terme només tindrà components negligibles d'ordre 2 en h .

3.3 Solucions a l'equació linearitzada

Durant les seccions anteriors hem posposat diverses vegades justificar que ens referim a la pertorbació h com una *ona* gravitatòria. Havent assolit l'equació d'ona en l'apartat anterior, com que la seva solució és a bastament coneguda, alguns lectors es podrien donar per satisfets. Però justificar que aquesta solució existeix necessita un desenvolupament considerable de teoremes analítics. No només això; que la puguem fer servir en el nostre cas és altament no trivial, ja que ens trobem en una varietat Lorentziana de la qual desconexim moltes característiques. Malgrat un tractament completament rigorós de l'equació en aquest últim aspecte queda fora de l'abast d'aquest treball, parlarem de la solució clàssica en un compacte de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ i proposarem una manera de tractar-la en tot l'espai. Haurem de suposar que és prou robusta per ser vàlida en la nostra varietat lleugerament pertorbada. Encara que aquesta hipòtesi mereixi un estudi més profund, sembla recolzada pels resultats de l'experiment del LIGO.

Així doncs, necessitem un recull de definicions i teoremes d'anàlisi per explicar la solució clàssica en aquest model, la descomposició de l'operador laplaciana i la seva relació amb la nostra equació d'ona. El lector familiaritzat amb espais de Sobolev pot saltar a l'explicació de 3.30. Per a la resta, en les definicions es suposa una base de mesures i conjunts mesurables per a definir integrals de Lebesgue, que es pot trobar a qualsevol de les introduccions de [3, 10].

Definició 3.12. *Un espai vectorial E amb una norma definida $\|\cdot\|_E$ serà un espai de Banach si és complet, és a dir, si per tota successió de Cauchy $(\{x_p\}_p$ tal que $\|x_p - x_q\|_E \Rightarrow 0$) existeix $x \in E$ tal que $\|x - x_p\|_E \Rightarrow 0$.*

Un exemple d'espai de Banach que utilitzarem aquí són els espais de funcions integrables L^p , que definim de la següent manera:

Definició 3.13. *Sigui una funció f en un espai mesurable Ω de mesura μ . L'espai \mathcal{L}^p de les funcions f que compleixen*

$$\left(\int_{\Omega} \|f\|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

forma l'espai $L^p = \mathcal{L}^p(\Omega)/\mathcal{N}(\Omega)$ amb la identificació $\mathcal{N}(\Omega) = \{f \simeq g \text{ si } f = g \text{ excepte en conjunts de mesura nul·la}\}$.

Definició 3.14. *Sigui un espai de Banach E amb la norma $\|\cdot\|_E$. Direm que és un espai de Hilbert si tenim un producte escalar definit $(\cdot, \cdot)_H$ de manera que $\|x\|_E = (x, x)_H^{\frac{1}{2}} \forall x \in E$.*

Cal remarcar que el producte escalar sobre espais complexos substitueix la propietat de la bilinealitat per la sesquilinealitat, això és, en l'espai de Hilbert H , $(x, \lambda y)_H = \bar{\lambda}(x, y)_H \forall x, y \in H$. A més, es compleix la desigualtat de Schwarz $|(x, y)_H| \leq \|x\|_H \|y\|_H$. Dels espais L^p que hem definit, el producte escalar $(f, g)_2 = \int f \bar{g} d\mu$ compleix $(f, f)_2^{\frac{1}{2}} = \left(\int |f|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2$, i per tant L^2 és també un espai de Hilbert.

La presència d'un producte escalar en els espais de Hilbert ens permet utilitzar el concepte natural d'ortogonalitat i, en particular, definir les bases ortonormals:

Definició 3.15. *En un espai de Hilbert H , anomenarem sistema ortonormal S a un conjunt d'elements de H tals que $\forall e_1, e_2 \in S$ compleixin $(e_1, e_2)_H = 0$ i $\|e_1\| = 1$. Si el subespai de Hilbert generat pel sistema S és H , això és, $S^\perp = 0$, direm que el sistema és complet i direm que $S = \{e_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ és una base ortonormal de H .*

També podem utilitzar el producte escalar per identificar els espais de Hilbert amb els seus duals usant el següent teorema. La prova requereix el teorema de projecció dels espais de Hilbert, explicada amb detall a [3](p.94).

Teorema 3.16. Teorema de representació de Riesz: *Sigui un espai de Hilbert H i el seu dual H' , l'aplicació $J : H \Rightarrow H'$ amb $J(x) = (\cdot, x)_H \forall x \in H$ compleix:*

$$\begin{aligned} (1) \quad & \|(\cdot, x_1)_H\|_{H'} = \|x_1\|_H, & (2) \quad & J(x_1 + x_2) = J(x_1) + J(x_2), \\ (3) \quad & J(\lambda x_1) = \bar{\lambda} J(x_1), & (4) \quad & \forall u \in H', \exists y \in H \text{ tal que } u = (\cdot, y)_H. \end{aligned} \quad (3.28)$$

per tot x_1, x_2 de H , de manera que és una isometria bijectiva entre espais.

Parlem ara dels operadors entre aquests espais. Com que els operadors diferencials de les nostres equacions són lineals, els podrem tractar com un cas particular d'operadors lineals entre espais mètrics.

Definició 3.17. *Un operador lineal és una aplicació lineal $T : E \Rightarrow F$ entre dos espais normats E i F . Anomenarem $\mathcal{L}(E, F)$ al conjunt de tots els operadors lineals entre aquests espais. Direm que un operador lineal és acotat si és continu.*

La caracterització d'operador acotat a partir de la seva continuïtat es deu a que la continuïtat de T ($\forall \epsilon > 0 \exists \delta$ tal que $T(\bar{B}_E(0, \delta)) \subset \bar{B}_F(0, \epsilon)$) implica que $\|Tx\|_F \leq C\|x\|_E$ amb $C = \epsilon/\delta$. Dels operadors lineals, ens interessarà veure què entenem per un operador compacte i autoadjunt. La primera definició utilitza la norma i per tant val en espais de Banach, mentre que per la segona ens hem de restringir a espais de Hilbert amb producte escalar.

Definició 3.18. *Un operador lineal $T \in \mathcal{L}(E, F)$ entre espais de Banach E, F és compacte si donada la bola tancada unitària de E , \bar{B}_E , $T(\bar{B}_E)$ és compacte en F .*

La compacitat dels operadors s'estudia sovint amb el teorema d'Ascoli-Arzelà [3](p. 115). El nostre cas serà prou complicat per requerir un desenvolupament extens més enllà del teorema, així que no hi aprofundirem.

Definició 3.19. *Un operador lineal $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ entre espais de Hilbert H_1 i H_2 té l'operador associat $T' : H'_2 \Rightarrow H'_1$ donat per*

$$(T'v)(x) = v(Tx) \forall x \in H_1, \forall v \in H'_2.$$

Per el teorema 3.28 $\forall v \in H'_2, \exists y \in H_2$ tal que $v = (\cdot, y)_{H_2}$. Definirem l'operador adjunt de T com l'operador $T^* : H_2 \Rightarrow H_1$ tal que

$$(x, T^*y)_{H_1} = (Tx, y)_{H_2} \forall x \in H_1, \forall y \in H_2.$$

Un operador autoadjunt serà un operador T tal que $T = T^*$.

Els espais que veurem ara no són una restricció dels espais de Banach, com els de Hilbert, sinó una generalització. Diverses propietats dels espais de Banach es poden estendre a aquests espais, malgrat no hi hagi una norma definida.

Definició 3.20. *Una semi-norma en un espai vectorial E (real o complex) és una aplicació $p : E \Rightarrow [0, \infty)$ tal que $\forall x, y \in E$, $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$ i $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$. Diem que una família de semi-normes $\mathcal{P} = \{p_k\}_k$ és suficient si $p(x) = 0$ per qualsevol $p_k \in \mathcal{P}$ implica $x = 0$.*

Si prenem una família suficient de semi-normes i definim les boles $U_p(\epsilon)$ amb $p \in \mathcal{P}$, $\epsilon > 0$, tenim que les interseccions finites d'aquestes boles són la base local \mathcal{U} del conjunt $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$, i es pot demostrar que és una topologia de E . Els espais amb una topologia que admet aquesta descripció a partir d'una família \mathcal{P} es diu que són espais localment convexos. Observem que una norma $\|\cdot\|$ compleix les propietats de la semi-norma, i podem definir una família de semi-normes suficient consistent només d'ella mateixa. Això implica que un espai normat és un espai localment convex.

Definició 3.21. *Segui un espai localment convex amb una família de semi-normes \mathcal{P} numerable. Anomenarem "norma" de Fréchet a*

$$\|x\|_F = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(x)}{1 + p_n(x)},$$

que compleix les propietats $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$, $\|-x\| = \|x\|$ i la desigualtat triangular, però no les altres propietats d'una norma convencional.

Podem veure que la topologia induïda per la distància de la norma de Fréchet $d(x, y) = \|x - y\|_F$ és equivalent a la definida anteriorment per la família de semi-normes, ja que de les definicions, $B_d(0, 1/2^k)$ conté $U_{p_{k+1}}(1/2^{k+1})$ i $U_{p_m}(1/2^k)$ conté $B_d(0, 1/2^{k+m+1})$.

Definició 3.22. *Un espai vectorial complet sota la norma de Fréchet és un espai localment convex que anomenarem espai de Fréchet.*

Hem vist com un espai dotat d'una norma és localment convex. Així doncs, resulta que els espais de Banach, que són complets, seran també espais de Fréchet, si bé el recíproc no és cert en general (el capítol 3 de [3] tracta aquests espais). Ens interessa una família de semi-normes en concret per parlar d'espais de funcions diferenciables com a espais de Fréchet.

Definició 3.23. *Segui un obert Ω de \mathbb{R}^n i K un compacte de Ω , un element $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ i l'operador diferencial associat $D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$, definim*

$$p_{K,\alpha}(f) = \|D^\alpha f\|_K = \sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)|.$$

Sigui ara una col·lecció de compactes K_j de Ω que compleixen $\forall K \in \Omega \exists N$ tal que $K \subset K_j$ per tot $j \geq N$, aleshores la família de semi-normes

$$q_j(f) = \sum_{|\alpha| \leq j} p_{K_j, \alpha}(f),$$

és suficient i designem l'espai que forma per $\mathcal{E}(\Omega)$.

Teorema 3.24. *L'espai $\mathcal{E}(\Omega)$ és un espai de Fréchet.*

Prova: Per definició de $\mathcal{E}(\Omega)$ només hem de veure que és complet. Com que la 'norma' de f ve donada pel suprem de les seves derivades a tot un compacte, perquè una successió $\{f_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{E}(\Omega)$ sigui de Cauchy la successió $\{D^\alpha f_j\}_{j=1}^\infty$ haurà de ser uniformement de Cauchy en tots els compactes $K \subset \Omega$. K compacte implica $D^\alpha f_j \Rightarrow f^\alpha$ uniformement; si prenem $f = f^0$, aleshores $f^\alpha = D^\alpha f$ i $f_j \Rightarrow f$ en $\mathcal{E}(\Omega)$ \square

L'espai $\mathcal{E}(\Omega)$ serà un espai de funcions \mathcal{C}^∞ , ja que només per a aquestes la norma estarà ben definida. De manera similar, considerem l'espai $\mathcal{E}^m(\Omega)$ definit amb les semi-normes $p_K(f) := \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_K$; aquest serà un espai de funcions \mathcal{C}^m .

Ara, $\mathcal{D}_K = \{f \in \mathcal{E}(\Omega); \overline{\{f \neq 0\}} \equiv \text{supp}(f) \subset K\}$ serà un subespai tancat de $\mathcal{E}(\Omega)$ i \mathcal{D}_K^m de $\mathcal{E}^m(\Omega)$ (definit de la mateixa manera en $\mathcal{E}^m(\Omega)$). Si denotem $\mathcal{D}_K^\infty = \mathcal{D}_K$, la unió d'aquests espais per tots els compactes de Ω , $\mathcal{K}(\Omega)$, seran els espais de les funcions $\mathcal{C}^m(\Omega)$ ($m \in [0, \infty]$) amb suport compacte:

$$\mathcal{D}^m(\Omega) = \bigcup_{K \in \mathcal{K}(\Omega)} \mathcal{D}_K^m(\Omega) \quad (m \in [0, \infty]).$$

Les funcions d'aquest espai les anomenarem funcions de test φ . Estan relacionades amb les distribucions, que són les aplicacions lineals de $\mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow \mathbf{C}$, així que anomenarem el seu espai \mathcal{D}' . Són generalitzacions de les funcions, i ens permeten definir la derivada feble per a funcions integrables però no necessàriament derivables:

Definició 3.25. *Sigui una funció f en l'espai de les funcions localment integrables $L_{loc}^1(\Omega)$. Sigui el producte escalar $(\varphi, f) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$ pels φ de $\mathcal{D}(\Omega)$, $(\cdot, f) = u_f$ és un element de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Com que podem identificar f amb (\cdot, f) , definirem la derivada feble de f , $\partial_j f$, a partir de la distribució $\partial_j u_f = (\cdot, \partial_j f)$ tal que*

$$(\varphi, \partial_j f) = - \int_\Omega f(x) \partial_j \varphi(x) dx = -(\partial_j \varphi, f) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Les derivades d'ordres superiors queden definides per recurrència ja que φ és \mathcal{C}^∞ .

Si observem la igualtat $\int_K \varphi(t) f'(t) dt = - \int_K \varphi'(t) f(t) dt$ sobre funcions f tals que $f \in \mathcal{E}^1(\Omega)$, $f' \in L_{loc}^1(\Omega)$ i amb $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, que es pot comprovar per integració per parts, veiem que la derivada feble serà equivalent a la derivada convencional si la funció f és diferenciable, però hem estès la operació a funcions que només són integrables. Recordem que $L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$, ja que nosaltres utilitzarem majoritàriament funcions del primer conjunt. A més, es pot demostrar que $\mathcal{D}(\Omega)$ és dens en $L^2(\Omega)$ i en $\mathcal{E}(\Omega)$ (cap. 6 de [3], p. 146).

Definició 3.26. *L'espai de Sobolev d'ordre $m \in \mathbf{N}$ en un obert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ és*

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \text{ tal que } D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}, \quad (3.29)$$

amb $1 \leq p \leq \infty$ i D^α la derivada feble d'ordre $|\alpha|$. Té la topologia de la norma $\|u\|_{m,p} := \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p$. Quan $p=2$, l'anomenarem $H^m(\Omega)$.

Per al problema que començarem a desenvolupar a continuació, s'utilitzen funcions que s'anul·len a la vora de la regió considerada. No ho demostrarem, però les funcions de $H^m(\Omega)$ que s'anul·len a $\partial\Omega$ són exactament el subconjunt $H_0^m(\Omega)$ definit com la clausura de $\mathcal{D}^m(\Omega)$. Intuïtivament, això sí, podem entendre que les funcions amb suport compacte dins de Ω no poden prendre valors diferents de zero arbitràriament aprop de la frontera, o no podríem trobar un compacte que contingués el seu suport.

Aquests últims espais completen els ingredients per trobar la descomposició espectral de l'operador Laplacà $\Delta \equiv \partial_1^2 + \dots + \partial_n^2$. Veiem quina utilitat té aquesta descomposició per al nostre problema. Sigui una solució h de l'equació d'ona $\square h = (\partial_t^2 - \Delta)h = 0$ a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, suposem que podem separar $h(x, t)$ en un factor temporal i un factor espacial (\mathbb{R}^3): $h(x, t) = a(t)u(x)$. Tindrem:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} a(t)\right)u(x) - a(t)(\Delta u(x)) = 0. \quad (3.30)$$

Observem aleshores que si $u(x)$ és una solució de $\Delta u(x) = \lambda_i u(x)$ per tot (x, t) , l'ortonormalitat dels termes implicarà que $\partial^2/\partial t^2 a(t) = \lambda a(t)$. En efecte, el seu producte és solució de l'equació anterior:

$$\left((\lambda a(t))u(x) - a(t)(\lambda u(x))\right) = 0$$

Això equival a prendre una solució del laplacà, independent del temps, i utilitzar l'operador \square per descriure'n la seva evolució temporal a partir del valor propi. Aquest raonament sorgeix de la comprensió clàssica de la relació entre l'espai i el temps. Per a nosaltres, però, és només una aproximació perquè no podem tractar-les en termes de variables independents en trobar-nos en una varietat Lorentziana de la qual desconexem la forma exacta.

Per veure que existeix tal descomposició, seguirem el desenvolupament del capítol 7 de [3], on el lector pot aprofundir en la demostració dels teoremes que donarem per suposats i veure'n altres aplicacions.

El resultat principal de la teoria de descomposició espectral és el següent:

Teorema 3.27. Teorema espectral de Hilbert-Schmidt: *Un operador $A : H_1 \Rightarrow H_2$ no nul, compacte i autoadjunt admet la descomposició*

$$Ax = \sum_{n \geq 1} \lambda_n(x, u_n)_{H_1} u_n, \quad (3.31)$$

si $\{u_n\}$ és la seqüència de vectors propis ortonormals de la seqüència finita $\{\lambda_n\}$ de valors propis de A en H per un x de H_1 . Si $\{\lambda_n\}$ és infinit, és té en canvi que $\lim_{N \rightarrow \infty} A_N = A$ a $\mathcal{L}(H)$ amb

$$A_N x := \sum_{n=1}^N \lambda_n(x, u_n)_H u_n.$$

Com que volem veure quina forma té la pertorbació h per detectar-la de manera aproximada, no hi ha cap inconvenient en resoldre l'equació només en una regió acotada de l'espai que podem fer tan gran com vulguem, com necessitarem pel següent teorema sobre un cas particular a \mathbb{R}^3 del problema de Dirichlet:

$$-\Delta u = f \quad (f \in L^2(\Omega)), \quad u = 0 \text{ en } \partial\Omega. \quad (3.32)$$

L'operador laplaciana, però, no és un operador compacte, així que no podem aplicar el teorema de Hilbert-Schmidt. Tanmateix, podem treballar amb l'equació $u = (-\Delta)^{-1}f$; si provem que Δ^{-1} és compacte i en relacionem les descomposicions haurem resolt l'inconvenient.

Teorema 3.28. *El problema de Dirichlet 3.32 en una regió acotada Ω té $\forall f \in L^2(\Omega)$ una solució feble u unívocament determinada a l'espai de Sobolev $H_0^1(\Omega)$. A més, l'operador invers és continu.*

$$\Delta^{-1} : L^2(\Omega) \Rightarrow H_0^1(\Omega). \quad (3.33)$$

Prova: Primer hem de caracteritzar les solucions. Amb la descripció de l'espai H_0^1 , és clar que les condicions del problema implicaran que una solució $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ també estarà a $H_0^1(\Omega)$. Si treballem amb derivades febles, també tindrem que $(\varphi, f)_2 = (\varphi, -\Delta u)_2$, i per 3.29, això és igual a $(\nabla \varphi, \nabla u)_2$ per qualsevol funció de test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Com que podem triar una successió d'aquestes funcions tal que $\varphi_k \Rightarrow v$ a $H^1(\Omega)$ i $\partial_j \varphi_k \Rightarrow \partial_j u$ a $L^2(\Omega)$ (de fet, es pot demostrar que l'espai $H^1(\Omega)$ és la completació de $H^1(\Omega) \cap \mathcal{E}$), això serà cert $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, de manera que les solucions del problema de Dirichlet compliran

$$(v, f)_2 = (v, -\Delta u)_2 = (\nabla v, \nabla u)_2. \quad (3.34)$$

Ara, per demostrar el teorema, necessitem el lema de Poincaré [3](p. 215). Ens diu que es compleix $\|\cdot\|_2 \geq C\|\cdot\|_D$ per una constant C amb la norma associada al producte de Dirichlet

$$(u, v)_D := (\nabla u, \nabla v)_2 \Rightarrow \|u\|_D^2 \equiv \int_{\Omega} |\nabla u|^2,$$

i que aquesta norma és equivalent a $\|\cdot\|_{(1,2)}$ a H_0^1 . Per la desigualtat de Schwarz dels productes escalars ($|(u, v)|_H \leq \|u\|_H \|v\|_H$), resulta que $\forall v \in H_0^1$, $|(v, f)_2| \leq \|f\|_2 \|v\|_2 \leq C\|f\|_2 \|v\|_D$. Podem utilitzar aquesta desigualtat per acotar la forma $(\cdot, f)_2 \in H_0^1$ amb $\|(\cdot, f)\|_2 \leq C\|f\|_2$, i l'equació 3.28 4) ens diu que hi ha una única funció $u \in H_0^1$ que tingui el mateix producte escalar amb els elements de H_0^1 que la forma anterior. Així doncs, la definició de la norma de Dirichlet i 3.29 impliquen que la funció u anterior compleix

$$(v, f)_2 = (\nabla v, \nabla u)_2 = (v, u)_D = \forall v \in H_0^1,$$

això és, 3.34. Per altra banda, 3.28 1) i la desigualtat del lema de Poincaré impliquen $\|u\|_D = \|(\cdot, f)\|_{H_0^{1'}(\Omega)} \leq C\|f\|_2$, o sigui que $\|\Delta^{-1}\| \leq C$, que és com caracteritzem els operadors continus. \square

El teorema menciona solucions febles. Aquest tipus de solucions són distribucions o funcions que compleixen una equació diferencial quan considerem les derivades febles que hem introduït abans (en comptes de derivades funcionals); en el nostre cas, seran funcions $u \in H_0^1(\Omega)$. Malgrat aquesta restricció, es pot demostrar que les solucions febles C^2 seran solucions clàssiques C^1 a Ω . En general:

Teorema 3.29. *Per a una regió acotada Ω de \mathbb{R}^n de classe C^{m+2} (amb $m > n/2$). Sigui el problema 3.32 amb $f \in H^m(\Omega)$, la seva solució u és de classe $C^2(\bar{\Omega})$ i és també una solució clàssica.*

El següent resultat de Rélich és l'últim ingredient per poder aplicar 3.27. No és gens trivial demostrar el teorema a partir de la definició de compacitat que hem exposat, sinó que es necessiten altres nocions com nuclis de integrabilitat i teoremes de convergència. Podem veure'n un desenvolupament a la pàgina 218 de [3] o el cas general per L^p a [10].

Teorema 3.30. *La inclusió $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ per qualsevol obert acotat Ω és compacta.*

Teorema 3.31. *Sigui Ω una regió acotada de \mathbb{R}^n , $(-\Delta)^{-1}$ és un operador compacte, injectiu i autoadjunt tant en $L^2(\Omega)$ com en $H_0^1(\Omega)$.*

Prova: Hem vist que $(-\Delta)^{-1}$ és continu com a operador de $L^2(\Omega)$ a $H_0^1(\Omega)$. En concret, la imatge d'un conjunt acotat serà acotat. Pel resultat de Relich anterior, la imatge d'un conjunt acotat a $H_0^1(\Omega)$ serà compacte a $L^2(\Omega)$. Per tant

$$(-\Delta)^{-1} : L^2(\Omega) \Rightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega),$$

és compacte. Similarment, podem compondre la inclusió amb l'acció de l'operador per veure que

$$(-\Delta)^{-1} : H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \Rightarrow H_0^1(\Omega),$$

també ho és. La unicitat de les solucions i la continuïtat impliquen la bijectivitat de $(-\Delta)^{-1}$, i la injectivitat es manté en compondre-la amb la inclusió. Per acabar, necessitem dues funcions test φ i ψ de $\mathcal{D}(\Omega)$ i la norma de Dirichlet definida anteriorment per veure que és autoadjunt. Prenent $u = (-\Delta)^{-1}\varphi$ i $v = (-\Delta)^{-1}\psi$ tenim

$$((-\Delta)^{-1}\varphi, \psi)_D = (\nabla(-\Delta)^{-1}\varphi, \nabla\psi)_2 = ((-\Delta)(-\Delta)^{-1}\varphi, \psi)_2 = (\varphi, \psi)_2,$$

$$(\varphi, (-\Delta)^{-1}\psi)_D = (\nabla\varphi, \nabla(-\Delta)^{-1}\psi)_2 = (\varphi, (-\Delta)(-\Delta)^{-1}\psi)_2 = (\varphi, \psi)_2.$$

Per continuïtat, $((-\Delta)^{-1}u, v)_D = (u, (-\Delta)^{-1}v)_D$, així que és autoadjunt en $H_0^1(\Omega)$. Per altra banda,

$$((-\Delta)^{-1}\varphi, \psi)_2 = (u, \psi)_2 = (u, -\Delta v)_2 = (\nabla u, \nabla v)_2,$$

$$(\varphi, (-\Delta)^{-1}\psi)_2 = (\varphi, v)_2 = (-\Delta u, v)_2 = (\nabla u, \nabla v)_2,$$

i per tant també és autoadjunt a $L^2(\Omega)$. □

Aquest teorema ens dona les condicions necessàries per utilitzar **3.27** sobre $(-\Delta)^{-1}$ i fer-ne la descomposició espectral a $H_0^1(\Omega)$. Així doncs,

$$(-\Delta)^{-1}v = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k(v, u_k)_D u_k \quad (v \in H_0^1(\Omega)), \quad (3.35)$$

és una sèrie convergent a $H_0^1(\Omega)$, $\{u_k\}$ una base (per la injectivitat de l'operador) ortonormal (respecte la norma de Dirichlet) al mateix espai tal que $(\Delta)^{-1}u_k = \mu_k u_k$. Observem que per un valor propi λ de Δ tenim que

$$\Delta u = \lambda u \Rightarrow -\frac{1}{\lambda} = (-\Delta)^{-1}u.$$

Proposem doncs el següent teorema:

Teorema 3.32. *Segui $f \in L^2(\Omega)$, el problema*

$$-\Delta u = f,$$

té una solució feble $u \in H_0^1(\Omega)$ que es descompon en la base ortonormal $\{\sqrt{-\lambda_k}\}$ de L^2 :

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} (f, u_k)_D u_k.$$

Prova: Com que $\mathcal{D}(\Omega)$ és un subconjunt de $H_0^1(\Omega)$ i és dens a $L^2(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ també és dens en $L^2(\Omega)$. En particular, $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ genera un espai dens en $L^2(\Omega)$. A més, això vol dir que podem considerar una successió $\{\varphi_k, \psi_k\}$ a $\mathcal{D}(\Omega)$ que tendeixi a u, v per veure que la relació $((-\Delta)^{-1}\varphi, \psi)_D = (\varphi, \psi)_2$ implica $((-\Delta)^{-1}u, v)_D = (u, v)_2$. Aplicant aquesta identitat tenim que

$$\|u_k\|_2^2 = ((-\Delta)^{-1}u, u)_2 = \mu_k = -\frac{1}{\lambda_k}, \text{ per } m \neq n \text{ } (u_m, u_n)_2 = 0,$$

i per tant $\{\sqrt{-\lambda_k}u_k\}_{k=0}^{\infty}$. Aleshores, podem descompondre f com:

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} (f, \sqrt{-\lambda_k}u_k)_2 \sqrt{-\lambda_k}u_k = - \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k (f, u_k)_2 u_k,$$

de manera que la sèrie $u = \sum_{k=0}^{\infty} (f, u_k)_2 u_k$ compleix l'equació. \square

Abans de recuperar el factor temporal, el següent teorema ens permet assegurar que cada element de la base de la descomposició és també una solució clàssica. D'ara endavant ens interessarà més el paper de les funcions u_k en la solució.

Teorema 3.33. *Segui un operador $L = \Delta + \lambda$, un conjunt obert no buit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ i $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Si Lu és a l'espai $\mathcal{E}(\Omega)$ aleshores $u \in \mathcal{E}(\Omega)$.*

Clarament, la nostra equació $-\Delta u_k = \lambda_k u_k$ és del tipus del teorema, i $Lu = 0$. Per tant, u pertany a $\mathcal{E}(\Omega)$ i, en particular, és C^∞ , o sigui que és una solució clàssica. Amb u_k hem trobat una descomposició de valors propis discrets de les solucions del

laplaciana en $\mathcal{E}(\Omega)$. Usant l'equació 3.30, per tant, podem construir funcions $a_k u_k$ a partir d'aquesta descomposició que compleixin la mateixa equació que $h_{\mu\nu}$. És clar que no podem estendre el resultat al cas $\Omega = \mathbb{R}^3$, que no és acotat com requereix el teorema 3.28; per operadors no compactes l'espectre de valors propis no té per què ser discret, i de fet pel laplaciana és continu (com es pot comprovar amb funcions tipus $\exp(\lambda x^i)$, que a \mathbb{R}^3 són solució $\forall \lambda \in \mathbb{R}$). Tanmateix, aquest resultat és una bona motivació per parlar de la pertorbació al nostre espai com a una combinació lineal de funcions u_k .

Quan considerem tot l'espai \mathbb{R}^3 , la teoria d'anàlisi de Fourier (capítol 7 de [3]) ens permet trobar una descomposició del laplaciana en funcions exponencials de manera que, pel teorema d'inversió de Fourier, la solució al problema de Dirichlet es pot recuperar amb aquestes funcions pròpies. L'analogia amb les nostres funcions u_k és clara, així que direm que prenen la forma

$$u_k(\vec{x}) = C_k^{x1} e^{i(p_k^x x + p_k^y y + p_k^z z)} + C_k^{x2} e^{-i(p_k^x x + p_k^y y + p_k^z z)},$$

amb $(p_k^x)^2 + (p_k^y)^2 + (p_k^z)^2 = \lambda_k$. De manera similar, en considerar la part temporal, com que a_k ha de compartir el valor propi ($\partial_t^2 a_k(t) = -\lambda_k a_k(t)$) resulta

$$a_k(t) = C_k^{t1} e^{i\lambda_k t} + C_k^{t2} e^{-i\lambda_k t}.$$

Observem que, efectivament, compleixen l'equació original 3.30. Podem considerar aquestes solucions generals com la suma de dues solucions diferents amb els valors propis $+\lambda_k$ i $-\lambda_k$. Ens interessa utilitzar aquestes solucions d'una manera particular: l'ona plana.

Definició 3.34. Designant per temps t els punts de \mathbb{R} i espai \vec{x} els punts de \mathbb{R}^3 , direm que una ona plana i periòdica és una funció

$$\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{R},$$

de manera que és periòdica en t i té definida una velocitat de propagació \vec{v} donada pel vector unitari $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ i de mòdul v amb les següents propietats:

$$\forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^3 \text{ tals que } \vec{x}_1 \cdot \vec{n} = \vec{x}_2 \cdot \vec{n} \text{ aleshores } \phi(\vec{x}_1, t) = \phi(\vec{x}_2, t),$$

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3, t, \tau \in \mathbb{R} \quad \phi(\vec{x} + \vec{v}\tau, t + \tau) = \phi(\vec{x}, t).$$

Es pot demostrar amb aquestes propietats que una ona plana es pot escriure com

$$\phi(t, \vec{x}) = A_0 e^{i(-\omega t + \frac{\omega}{v} \vec{n} \cdot \vec{x})}.$$

Veient la solució general, és clar que l'ona plana és el producte de dues de les solucions anteriors amb $\omega = \lambda_k$, $\vec{p} = \lambda_k \vec{n}$ i $v = 1$. D'ara endavant, deixarem de parlar de la solució u_k associada al valor propi λ_k , i veurem l'efecte d'una sola ona plana gravitacional de freqüència λ . Com que la solució és una suma d'ones planes de diferents freqüències, podem entendre aquesta aproximació com la detecció de la freqüència amb el coeficient més gran, de manera que la magnitud dels sumands

amb altres freqüències és de l'ordre de correccions negligibles sobre l'ona de la freqüència característica. Això no té per què ser vàlid en tots els casos, però en un sistema binari de cossos de masses semblants en rotació, el principal objecte d'estudi en la producció d'ones, hi ha una relació natural entre la freqüència de les ones gravitatòries i la freqüència de rotació (podem veure'n més detalls en l'expansió de la secció 7.5 de [6]), de manera que sí que n'hi ha una de singular. Altres sistemes amb una periodicitat més complicada podrien necessitar ser estudiats com a suma de més ones planes. Per la linealitat de les equacions, aquest fet canviaria els resultats dels següents apartats, però no perdriem la capacitat de resoldre el sistema.

Que les ones siguin planes, per altra banda, es pot entendre físicament degut a les grans distàncies que ens separen de qualsevol objecte capaç de produir ones gravitacionals detectables; per simetria esperem que una font emeti ones amb fronts esfèrics, els quals a radis molt grans seran indistingibles d'un pla.

L'elecció del signe contrari entre la part temporal i l'espacial ens és útil per recuperar la notació de \mathbb{R}_1^4 i expressar l'ona plana com la funció

$$\phi(x^\mu) = Ce^{ik_\mu x^\mu},$$

amb k_μ el quadrivector $(\lambda, \lambda\vec{n})$. Amb aquesta expressió, veiem que l'equació $\square\phi = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi = k_\mu k^\mu\phi = 0$ per tots els punts implica $k^\mu k_\mu = 0$, i per tant el vector de propagació és un vector lumínic: les ones gravitacionals es propaguen a la velocitat de la llum. Acabem recuperant la notació tensorial de la solució. Les ones gravitacionals seran la part real de la funció:

$$h_{\mu\nu} = C_{\mu\nu}e^{ik_\lambda x^\lambda}. \quad (3.36)$$

Observem que, com requeríem, el mòdul de la pertorbació serà el de $C_{\mu\nu}$ que pot ser arbitràriament petit.

3.4 Polarització de les ones

En la secció anterior hem estudiat com descriure la dependència de la pertorbació respecte els punts de la varietat; ara veurem la forma que té el tensor constant que multiplica la solució. Veient les condicions que hem imposat en fixar el gauge, podem deduir quants graus de llibertat esperem tenir, però la descomposició en els components, que no són independents, ho dificulta. El més senzill és prendre els 6 graus de llibertat de 3.17, després veure que 3.14 són 3 equacions amb les components espacials del quadrivector de propagació k , i recordar que s^{ij} té traça nul·la per definició: el tensor s^{ij} té 2 graus de llibertat. Tradicionalment, aquests graus de llibertat es relacionen amb dos estats de polarització, h_+ i h_\times . Entendrem el simbolisme en descriure l'efecte que tenen sobre l'espai.

Si triem el nostre vector de propagació k en la direcció de l'eix z , representant la detecció d'ones zenitals, tenim $k_\mu = (\omega, 0, 0, -\omega)$, ja que les restriccions sobre k_μ

ens donen llibertat per tirar el signe de la component z , i per tant:

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{11} & s_{12} & 0 \\ 0 & s_{12} & -s_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + A_\times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

Anomenarem aquestes matrius h_+ i h_\times respectivament. Podem reescriure a partir d'aquesta descomposició la solució 3.36, en coordenades x, y, z i amb una fase inicial per poder prendre un temps arbitrari. Tindrem:

$$h_+(t) = A_+ h_+ \cos\left(-\omega t - \omega \frac{z}{c} - \varphi\right) \text{ i } h_\times(t) = A_\times h_\times \cos\left(\omega t + \omega \frac{z}{c} + \varphi\right). \quad (3.38)$$

3.5 Formació d'ones gravitacionals

La solució que hem trobat ens permet parlar dels efectes de les ones en el nostre entorn. Però és clar que si ens volem situar en un sistema de cossos que en generi per estudiar-ne la producció, no podem utilitzar l'aproximació de tensor de moment-energia nul. Hem vist desenvolupant 3.19 que no necessitem aquesta condició per tal que la pertorbació h compleixi l'equació d'ona. La teoria d'equacions diferencials, que no desenvoluparem aquí, ens permet doncs utilitzar les distribucions que hem definit per descriure la solució no homogènia a partir de la funció de Green (podem veure'n un tractament al final del capítol 6 de [3]), que es caracteritza per complir

$$\square G(x^\sigma - y^\sigma) = \delta^4(x^\sigma - y^\sigma) \text{ i } h_{\mu\nu}(x^\sigma) = \int G(x^\sigma - y^\sigma) F_{\mu\nu}(y^\sigma) d^4 y,$$

donada una equació $\square h_{\mu\nu}(x^\sigma) = F_{\mu\nu}(x^\sigma)$ com 3.19 i la delta de Dirac en 4 dimensions δ^4 . En un desenvolupament com el dels apartats 7.5 i 7.6 de [6] podem veure com resoldre aquesta equació en el cas particular d'un sistema binari de dos cossos amb la mateixa massa (el sistema més estudiat, per la seva simplicitat). Curiosament, la primera mesura del LIGO va ser precisament d'un sistema d'aquest tipus, i va contribuir a l'escepticisme inicial del descobriment, pensant que algú podia haver manipulat l'experiment.

Estudiar la formació d'ones és rellevant principalment perquè permet deduir la pèrdua d'energia del sistema en emetre'n. El lector pot seguir-ne els càlculs necessaris en els capítols 35 i 36 de [11], per exemple. La pèrdua d'energia d'un sistema va ser la primera mesura indirecta de l'existència de les ones gravitacionals, amb les observacions l'any 1974 per part de Hulse i Taylor d'un sistema binari, PSR1913+16.

4 Detecció d'ones gravitatòries

En la secció anterior hem trobat les equacions que descriuen una pertorbació petita de la mètrica i hem vist que es comportaven com una ona. Així doncs, és raonable pensar que si assolim la precisió instrumental suficient podríem intentar detectar-les. Per veure si això és cert, hem d'entendre primer com afecta la presència d'aquestes ones gravitatòries als objectes que habiten l'espai-temps. Recordem que utilitzarem $c=1$ per la velocitat de la llum; en cas contrari la coordenada temporal l'anomenaríem ct o la mètrica plana seria $\text{diag}(-c^2, 1, 1, 1)$.

4.1 Posició relativa d'observadors en caiguda lliure

Un dels efectes dels postulats de la relativitat general que hem comentat és que les partícules únicament sota l'efecte de la gravetat estan en caiguda lliure. Això vol dir que un observador puntual que es mogui per una geodèsica no notarà cap canvi per passar d'un camp gravitatori a un altre. En canvi, podria fer mesures de la posició relativa de partícules properes, ja que experimentaran un camp gravitatori diferent al seu. És clar que els conceptes clàssics de coordenades no funcionaran en una varietat Lorentziana com l'espai-temps, però l'eina de les geodèsiques ens permet relacionar, en un entorn local, la trajectòria d'altres observadors en caiguda lliure amb les seves trajectòries en l'espai tangencial euclidià que percebem des del nostre punt de la varietat. Utilitzarem les definicions 3.2 i 3.4, entenent aquí com a observador una corba de les mateixes característiques que la partícula material però sense associar-li un moment ni una massa.

Situem-nos en la geodèsica $\gamma(t)$ que recorrem com a observadors en la varietat de l'espai-temps V . Per representar els eixos euclidians amb què descriuríem l'espai que veiem, utilitzarem els camps vectorials $e_1(t)$, $e_2(t)$ i $e_3(t)$ que en un instant de temps t_0 es corresponguin a una elecció particular d'una base ortonormal de l'espai tangent E_{t_0} a $\gamma(t_0)$. Per tal que siguin estàtics hauran de desplaçar-se paral·lelament al llarg de la geodèsica, això és, $\nabla_{\dot{\gamma}} e_i = 0$. Aquestes equacions definiran unívocament els camps vectorials per a l'elecció que haguem pres a t_0 , i el transport paral·lel ens assegura que seran base ortonormal de E_t per els altres temps t . Si reanomenem el punt inicial $(t_0, x_0^1, x_0^2, x_0^3) = (0, 0, 0, 0) = 0$, podem prendre una carta local en un entorn $U = (-\delta, \delta) \times B(0, \epsilon)$ d'aquest punt amb la base descrita e_i :

$$\begin{aligned} \Psi : U &\implies V, \\ (t, x^1, x^2, x^3) &\implies \varphi_t(x^i e_i(t)) = \gamma_{x^i e_i(t)}(1). \end{aligned}$$

On, per un vector $v = x^i e_i(t)$ de E_t , $\gamma_v(s)$ és la geodèsica tal que $\gamma_v(0) = \gamma(0)$, $\dot{\gamma}_v(0) = v$. Clarament la nostra trajectòria com a observadors tindrà coordenades $\gamma(t) = (t, 0, 0, 0)$, i com que la mètrica serà la diagonal $(-1, 1, 1, 1)$, es complirà $\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = -1$. Malgrat la geodèsica de φ_t no té perquè està ben definida per $s=1$, sí que estarà definida en un entorn de $\gamma_v(0)$, així que podem restringir-nos als $v \in B(0, \delta) \subset E_t$ tals que $\gamma_v(1)$ està ben definit. D'aquesta manera podem definir les subvarietats $S_t = \varphi(B(0, \delta))$ de tots els punts de la varietat ben caracteritzats per

Ψ donat un temps t i descriure les geodèsiques entre $\gamma(t)$ i els punts $(t, p^1, p^2, p^3) \in S_t$ amb $\gamma_v(s) = (t, sv^1/\|v\|, sv^2/\|v\|, sv^3/\|v\|)$, si prenem $v = (p^1, p^2, p^3) \in E_t$ i $\|\cdot\|$ la norma euclidiana de E_t . Observem que tot això és semblant a la construcció del difeomorfisme 3.20, però en aquest cas estem relacionant vectors de l'espai $T_{\gamma(t)}(V)$ amb punts de V .

Volem fer servir aquesta maquinària per descriure una segona geodèsica γ_2 des de la perspectiva de $\gamma_1 = \gamma$. Les geodèsiques estan inicialment parametritzades per l'arc, així que τ representa el temps propi de cada una; també ho entendrem així quan descriguem altres geodèsiques. Ara bé, com que ens interessa només la perspectiva de l'observador 1, situarem l'origen de temps per tots dos en el moment en què travessen S_0 , i a més, anomenem t al temps propi de γ_1 . Serà útil per al següent lema, que relaciona la curvatura de V amb l'acceleració percebuda de γ_2 .

Lema 4.1. *Sigui la carta i les geodèsiques anteriors, existeixen dos nombres reals $\epsilon_s, \epsilon_\tau > 0$ tal que si la distància entre $\gamma_1(0)$ i el punt de tall entre $\gamma_2(\tau)$ i S_0 és menor que ϵ_s aleshores existeix una variació*

$$\begin{aligned} \alpha : (-\epsilon_s, \epsilon_s) \times (-\epsilon_\tau, \epsilon_\tau) &\Rightarrow V, \\ (s, \tau) &\Rightarrow \alpha(s, \tau). \end{aligned}$$

amb les propietats

- 1) $\alpha(0, \tau) = \gamma_1(\tau)$ i $\alpha(s_2, \tau) = \gamma_2(\tau)$ per algun $s_2 \in (-\epsilon_s, \epsilon_s)$.
- 2) Cada corba $\tau \Rightarrow \alpha(s, \tau)$ és una geodèsica amb vector tangent de norma $\sqrt{-c^2}$.
- 3) La distància mínima dels punts $s \in S_0$ a $\gamma_1(0)$ ve donada per la longitud d'arc de $\alpha(s, 0)$.
- 4) El camp vectorial $\partial/\partial s$ sobre la corba $\gamma_1(\tau)$ és perpendicular a $\partial/\partial \tau$ i representa la variació de α en S_τ .

Prova: Recordem que en la carta que hem fet, si p és el punt de tall de $\gamma_2(\tau)$ i S_0 , que hem fixat que sigui a $\tau = 0$, tindrem una geodèsica $\gamma_p(s) = (0, sp^1/\|p\|, sp^2/\|p\|, sp^3/\|p\|)$ definida en un interval $(-\epsilon_s, \epsilon_s)$ que inclou l'1. Si prenem la unió dels espais tangents $T_p(V)$ per cada $p \in \gamma_p$ tenim un subespai $T_{\gamma_p}(V)$ del fibrat tangent de tota la varietat $T(V)$. Sigui $v(s) \in T_{\gamma_p}(V)$ una corba diferenciable tal que $v(0) = \dot{\gamma}_1(0)$, $v(1) = \dot{\gamma}_2(0)$ i $\|v(s)\|^2 = -1 \forall s \in (-\epsilon_s, \epsilon_s)$. El valor del mòdul implica que són temporals, i per continuïtat han de compartir orientació temporal amb γ_1 que per definició apunta al futur. Amb γ_p i v podem construir la variació α com el conjunt de geodèsiques $\gamma_s(\tau)$ tals que $\gamma_s(0) = \gamma_p(s)$ i $\dot{\gamma}_s(0) = v(s)$, que estaran únicament definides en un interval $-\epsilon_{\tau_s} < \tau < \epsilon_{\tau_s}$. Si prenem $\epsilon_\tau = \inf_{s \in (-\epsilon_s, \epsilon_s)} \epsilon_{\tau_s}$, tindrem la variació α que busquem amb $s_2 = 1$. Ens queda el punt 4) per provar. Prenent $g(\partial/\partial \tau, \partial/\partial \tau) = -1$, és clar que es compleix

$$0 = \frac{\partial}{\partial s} g\left(\frac{\partial}{\partial \tau}, \frac{\partial}{\partial \tau}\right) = 2g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial \tau}, \frac{\partial}{\partial \tau}\right)$$

per simetria del tensor g . Per altra banda, com que $\tau \Rightarrow \alpha(s, \tau)$ són geodèsiques, es compleix que $\nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} \frac{\partial}{\partial \tau} = 0$, així que:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} g\left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial \tau}\right) = g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial \tau}\right) + g\left(\frac{\partial}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} \frac{\partial}{\partial \tau}\right) = g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial \tau}, \frac{\partial}{\partial \tau}\right) + 0 = 0$$

Si $g(\partial/\partial s, \partial/\partial \tau)$ no depèn de τ i per $s = 0, \tau = 0$ s'anul·la, s'anul·larà per tots els punts $s=0$ sigui quin sigui τ . \square

Teorema 4.2. *Siguin dos observadors A i B en caiguda lliure de trajectòries γ_1 i γ_2 en una varietat V de mètrica g i tensor de curvatura R . Si el segon observador passa prou aprop de $\gamma_1(t)$ com per poder descriure la seva posició amb la carta anterior, i segons aquesta carta la posició de B està associada al vector $v(t)$ en un temps determinat, l'acceleració de B percebuda per A a t serà $R(\dot{\gamma}_1, v(t))\dot{\gamma}_1$.*

Prova: Prenent el desenvolupament de la carta Ψ , podem relacionar el punt $p_t \in S_t$ on es troba l'observador B amb un vector $v_t \in T_{\gamma_1(t)}(V)$. L'acceleració que mesurarà dependrà de la variació d'aquest vector al llarg de la seva trajectòria: $\nabla_{\dot{\gamma}_1(t)} \nabla_{\dot{\gamma}_1(t)} v_t$. Veiem que podem relacionar aquest vector amb una variació α com la del lema usant el mateix sistema de coordenades, ja que $\alpha(s, \tau)$ descriu una geodèsica de $\gamma_1(t)$ a p_t . Per veure què és v fem l'expansió en sèrie de α sobre s al voltant de $s = 0$:

$$\alpha(s, \tau) = \alpha(0, \tau) + \frac{\partial \alpha(0, \tau)}{\partial s} s + \mathcal{O}\left(\frac{\partial \alpha(0, \tau)}{\partial s}\right).$$

Ara bé, coneixem $\alpha(0, \tau) = \gamma_1(\tau) = (\tau, 0, 0, 0)$ i per la propietat 4) del lema el primer component de $\partial \alpha(0, \tau)/\partial s$ serà nul. Recordem que per arribar fins al punt p_t no hem deixat la s arbitràriament petita, sinó els vectors que ens hi porten. Com que $\partial \alpha(0, \tau)/\partial s = \partial \gamma_1(\tau)/\partial s \in T_\gamma(\tau)(V)$ serà tan petit com els vectors que hem considerat, podem ometre el terme amb factors d'ordre superior. Si n'escrivim els components, trobarem fàcilment el punt p_t vist l'observador γ_1 :

$$\alpha(s, \tau) \approx \left(\tau, \frac{\partial \alpha^1(0, \tau)}{\partial s} s, \frac{\partial \alpha^2(0, \tau)}{\partial s} s, \frac{\partial \alpha^3(0, \tau)}{\partial s} s \right) \Rightarrow$$

$$p_t \approx \left(t, \frac{\partial \alpha^1(0, t)}{\partial s}, \frac{\partial \alpha^2(0, t)}{\partial s}, \frac{\partial \alpha^3(0, t)}{\partial s} \right).$$

Això vol dir que $v_t \approx (\partial/\partial s)|_{(0,t)}$. Així, l'acceleració és aproximadament

$$\begin{aligned} \left(\nabla_{\dot{\gamma}_1(t)} \nabla_{\dot{\gamma}_1(t)} \frac{\partial}{\partial s} \right) \Big|_{(0,t)} &= \left(\nabla_{\dot{\gamma}_1(t)} \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \dot{\gamma}_1(t) \right) \Big|_{(0,t)} = \\ &= \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \nabla_{\dot{\gamma}_1(t)} \dot{\gamma}_1(t) \right) \Big|_{(0,t)} + R\left(\dot{\gamma}_1(t), \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{(0,t)} \right) \dot{\gamma}_1(t) = R\left(\dot{\gamma}_1(t), \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{(0,t)} \right) \dot{\gamma}_1(t). \end{aligned}$$

On hem utilitzat 1.7 i 1.8 amb $[\partial/\partial s, \partial/\partial t] = 0$ i que la torsió és nul·la. \square

En general, aquests tipus de camps s'anomenen camps de Jacobi.

Definició 4.3. *En una varietat M de connexió ∇ i curvatura R , sigui un camp vectorial ξ sobre una geodèsica γ . Si ξ compleix l'equació $\nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}} \xi = R(\dot{\gamma}, \xi)\dot{\gamma}$ direm que és un camp de Jacobi.*

4.2 Detecció en l'entorn terrestre

La quantitat d'elements de la pertorbació que hem anul·lat amb els gauges i altres consideracions fan que les equacions anteriors no siguin gaire complicades. Utilitzant que la nostra trajectòria com a observadors $\gamma_1(t)$ té $\dot{\gamma}_1(t) = (1, 0, 0, 0)$, tindrem que l'acceleració és $a^i = v^j R^i(\partial_1, \partial_j) \partial_1 = v^j R^i_{1j1}$. Recordant l'expressió 3.3,

$$a^i = v^j \frac{1}{2} \eta^{i\sigma} \left[\partial_j \partial_t h_{1\sigma} + \partial_t \partial_\sigma h_{1j} - \partial_j \partial_\sigma h_{11} - \partial_t \partial_t h_{j\sigma} \right] = -\frac{1}{2} v^j \partial_t^2 h_{ij}. \quad (4.1)$$

En l'últim pas hem utilitzat que $\eta^{i\sigma}$ val 1 per $\sigma = i$ i 0 en els altres casos. Si l'efecte de la pertorbació és tan petit com esperem, la dependència de $v^j(t)$ amb el temps es pot negligir i substituir-hi $v^j(0)$. La descomposició 3.37 ens permet escriure

$$\partial_t^2 v^i(t) = \ddot{v}^i(t) = -\frac{1}{2} v^j(0) \partial_t^2 \left(h_{+ij}(t) + h_{\times ij}(t) \right).$$

La linealitat dels operadors ens indica que podem prendre les solucions com una combinació lineal de les solucions per cada polarització possible. Per exemple, l'efecte d'una ona polaritzada + serà, utilitzant 3.38 i que som al pla $z=0$:

$$\ddot{v}^i(t) = -\frac{1}{2} v^j(0) \partial_t^2 \left(A_+ h_{+ij} \cos(\omega t + \varphi) \right).$$

Deduir les equacions del moviment a partir d'aquí és ben senzill. Nosaltres ho farem per partícules situades en una circumferència de radi petit ϵ al voltant de l'observador, parametritzant les seves posicions amb les coordenades polars $(v(0))(\theta) = (\epsilon \cos(\theta), \epsilon \sin(\theta), 0)$. També fixarem $\varphi = -\pi/2$ de manera que a $t=0$ l'acceleració sigui 0 ($\cos(0 - \pi/2) = \sin(0) = 0$) i la posició, per tant, la d'equilibri. Observant que $v^j h_{+ij} = (\epsilon \cos(\theta), -\epsilon \sin(\theta), 0)$ tenim:

$$\begin{aligned} \ddot{v}(\theta, t) &= \frac{\omega^2 A_+ \sin(\omega t)}{2} (\epsilon \cos(\theta), -\epsilon \sin(\theta), 0), \\ \dot{v}(\theta, t) &= -\frac{\omega A_+ \cos(\omega t)}{2} (\epsilon \cos(\theta), -\epsilon \sin(\theta), 0) + \dot{v}(0), \\ v(\theta, t) &= -\frac{A_+ \sin(\omega t)}{2} (\epsilon \cos(\theta), -\epsilon \sin(\theta), 0) + \dot{v}(\theta, 0)t + v(\theta, 0). \end{aligned} \quad (4.2)$$

El terme $\dot{v}(0) \neq 0$ indicaria que els punts ja s'estan movent inicialment respecte l'observador a 0. Podem considerar que en el nostre experiment no ho faran. Per altra banda, $v(\theta, 0) = \epsilon(\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$. Hem trobat doncs la descripció exacta de l'efecte d'una ona de polarització +. Si representem aquestes magnituds per a diferents punts de la circumferència obtenim la figura 1.

Ara és aparent que el nom de la polarització es deu a la deformació que pateix una circumferència sota aquest tipus d'ones. De manera similar, podem arribar a veure que per la polarització \times dona les equacions

$$\begin{aligned} \ddot{v}(\theta, t) &= \frac{\omega^2 A_+ \sin(\omega t)}{2} (\epsilon \sin(\theta), \epsilon \cos(\theta), 0) \\ \dot{v}(\theta, t) &= -\frac{\omega A_+ \cos(\omega t)}{2} (\epsilon \sin(\theta), \epsilon \cos(\theta), 0) + \dot{v}(0) \\ v(\theta, t) &= -\frac{A_+ \sin(\omega t)}{2} (\epsilon \sin(\theta), \epsilon \cos(\theta), 0) + \dot{v}(\theta, 0)t + v(\theta, 0) \end{aligned} \quad (4.3)$$

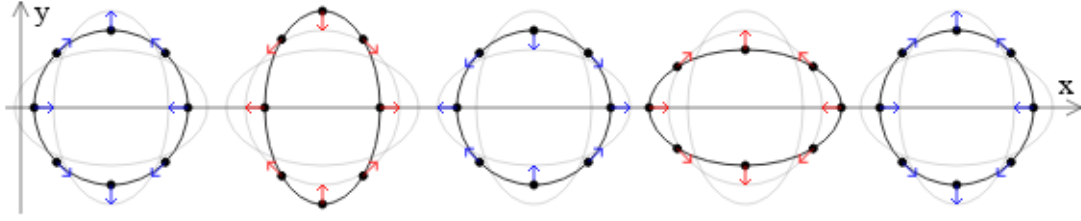


Figura 1: Acció d'una ona gravitacional polaritzada + sobre partícules a distància constant ϵ . Es representa $t = 0, \frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{\omega}, \frac{3\pi}{2\omega}$ i $\frac{2\pi}{\omega}$, amb la velocitat en blau i l'acceleració en vermell.

Amb les mateixes consideracions sobre $\dot{v}(0)$ i $v(0)$, per tant, tindrem la figura 2.

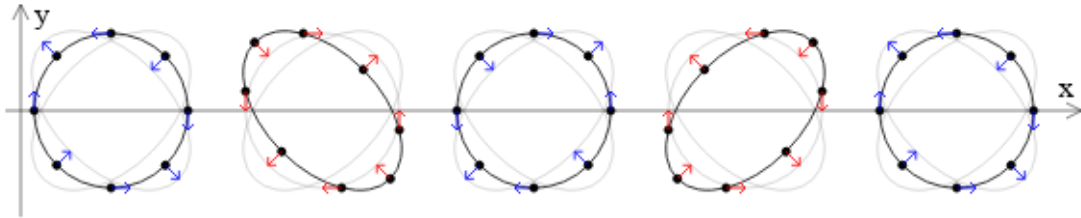


Figura 2: Acció d'una ona gravitacional polaritzada x sobre partícules a distància constant ϵ . Es representa $t = 0, \frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{\omega}, \frac{3\pi}{2\omega}$ i $\frac{2\pi}{\omega}$, amb la velocitat en blau i l'acceleració en vermell.

Per mesurar aquests moviments, hem de tenir en compte què passa amb el camp gravitatori terrestre. Quan hem parlat de les solucions de la relativitat general a l'apartat **2.3** hem vist que la solució de Schwarzschild és una solució estàtica i les seves hipòtesis s'adeqüen a la terra com a cos celeste. Així doncs, si prenem l'equació 2.21 en termes pertorbatius, $g = \eta + h$, tenint en compte l'expressió de η en coordenades esfèriques resulten tots els termes de h nuls excepte $h_{rr} = (1 - \frac{K}{r})^{-1} - 1 = \frac{K}{r-K}$ i $h_{tt} = (1 - \frac{K}{r}) - (-1) = \frac{K}{r}$. Fins a la deducció de l'equació 4.1 només hem tingut en compte el paper de la coordenada temporal. Així doncs, tot i que hem tractat els coeficients $i = 1, 2, 3$ com als eixos x, y, z per a les trajectòries, podríem utilitzar la mateixa expressió per a r, θ, ϕ . Si ho fem, resulta que l'únic component no nul és $a^r = -\frac{1}{2}v^r \partial_t^2 h_{rr}$, és a dir, que només aporta acceleració radial, tal com esperariem de la nostra experiència quotidiana amb la gravetat. Si volguéssim tenir en compte l'efecte d'aquesta component radial en les nostres equacions en coordenades euclidianes, observem que $\partial_t^2 h_{rr}$ dependrà de $\dot{r}(t)$. Considerant $r_{terra} \gg \Delta v$ i que δv serà en el pla xy , aquest terme serà molt més petit que els desplaçaments δv , i a més estarà multiplicat per el factor v^r que també és petit; resultarà negligible.

4.3 Experiment de LIGO, 2015

Encara que la descripció d'aquest fenomen sigui tan antic com la teoria de la relativitat general, que va ser acceptada ràpidament per explicar correctament problemes

aleshores vigents com la precessió del periheli de Mercuri, el debat sobre la seva existència va estar vigent durant molts més anys. Les mesures de [12] van ser la primera prova indirecta de les ones gravitacionals, l'any 1982, a través de la pèrdua d'energia que comporta l'emissió d'ones per part d'un sistema, cimentant la validesa del fenomen. Tanmateix, els primers projectes per la detecció directa de les ones ja feia anys que es plantejaven, i als anys 60-70 van sorgir les primeres propostes d'un detector amb un sistema d'interferometria com el del LIGO.

La dificultat més gran de la detecció de les pertorbacions que hem descrit és la seva magnitud. Per models amb un sistema binari, la magnitud de la pertorbació es pot aproximar per $h \approx R_s^2/rR$, amb R_s el radi de Schwarzschild ($R_s = 2GM/c^2$), r la distància al sistema i R el radi de l'òrbita; la freqüència per $\nu \approx cR_s^{1/2}/10R^{3/2}$. Aquestes aproximacions es poden veure pas a pas a l'apartat 7.7 de [6], però s'entenen veient els càlculs de l'apartat 7.5 i 7.6. Així, per un sistema de dos forats negres de 10 masses solars orbitant amb un radi de 10 cops el seu R_s , a una distància de $100Mpc \approx 10^{24}m$ tindríem

$$h \approx 10^{-21} \quad \text{i} \quad \nu = 10^2 s^{-1}. \quad (4.4)$$

Per altra banda, no podem mesurar les deformacions de l'espai amb un instrument estàtic, ja que es deformaria juntament amb l'espai i no transmetria cap canvi en la distància d'una partícula llunyana a l'observador.

La interferometria consisteix en la superposició de dos feixos de llum coherents de la mateixa longitud d'ona que han recorregut dos camins diferents, de manera que creïn interferències segons la diferència de longitud dels seus camins. L'interferòmetre que s'utilitza al LIGO té una sola font de llum, de $\lambda \approx 10^{-4}cm$, amb un prisma ('beamsplitter') que reflecteix la meitat del feix en un angle recte i deixa passar l'altra meitat. Així els dos rajos coherents recorren dos braços perpendiculars de la mateixa longitud $L = 4km$ amb un mirall al final que els reflecteix per tornar-los a superposar a l'origen, on s'observen les possibles interferències. És clar que només hi haurà interferències si la fase de la ona difereix en haver recorregut els dos braços.

Aquest mètode soluciona totes dues qüestions: la velocitat constant de la llum ens permetrà traduir la deformació de l'espai a tenir l'ona electromagnètica en una fase o una altra segons el temps que hagi trigat en recórrer-lo, i també permet fer que la llum travessi múltiples cops l'espai pertorbat per acumular-ne l'efecte abans de superposar els feixos. En concret, observant la interferència després de 100 viatges dins els braços, tindríem

$$\delta\phi = 2 \cdot 100 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) \delta L \approx \frac{400\pi}{10^{-4} cm} (10^{-21} \cdot 4 km) \approx 5 \cdot 10^{-9},$$

una millora considerable de la precisió amb què es requereix detectar les deformacions. Mesurar un canvi de 10^{-9} vegades la longitud d'ona segueix sent complex, però està a l'abast dels detectors actuals usant feixos amb prou fotons ($\sqrt{N} > \delta\phi$) per minimitzar estadísticament el soroll en la distribució de longituds d'ona, que es comporta com una distribució de Poisson.

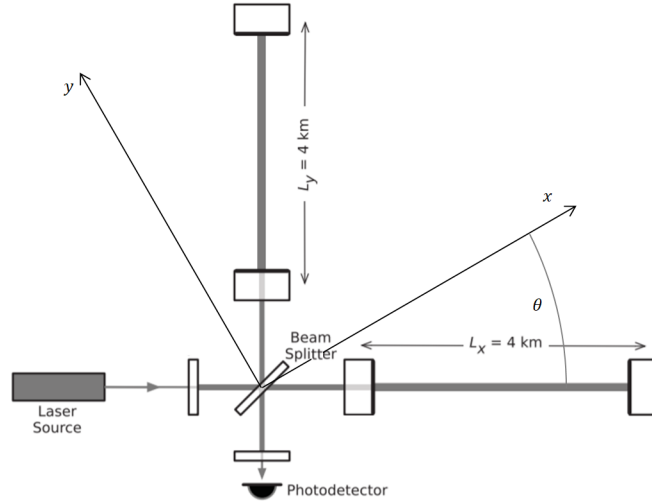


Figura 3: Dibuix esquemàtic de l'estructura de l'interferòmetre. Representem els eixos d'una ona polaritzada + en funció de l'angle θ respecte els eixos dels braços

Cal discutir els efectes en l'experiment d'altres suposicions que hem fet en la descripció de les ones. Primer, hem descrit l'efecte de les ones polaritzades. Suposant que arriben en un angle θ respecte l'interferòmetre (fig. 3), podem determinar l'efecte de la deformació segons les equacions de la posició $v(\phi, t)$ 4.2 amb $\phi = -\theta$ pel mirall de L_x :

$$\begin{aligned}
 L_2 &= -\frac{A_+}{2}L \left(\cos(-\theta), -\sin(-\theta) \right) \sin(\omega t) + L \left(\cos(-\theta), \sin(-\theta) \right) = \\
 &= L \left(\cos(\theta) \left(1 - \frac{A_+}{2} \sin(\omega t) \right), -\sin(\theta) \left(1 + \frac{A_+}{2} \sin(\omega t) \right) \right) \Rightarrow \\
 \|L_2\| &= L \sqrt{1 + \frac{A_+^2}{4} \sin^2(\omega t) - 2A_+ \sin(\omega t) \cos(2\theta)}.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Aproximant el mòdul d'aquest vector en una expansió fins a termes d'ordre 1 en A_+ , que recordem és la magnitud de la pertorbació h , i restant la longitud L , resulta una elongació $\delta L = -A_+ \sin(\omega t) \cos(2\theta)$; per la simetria de la pertorbació és fàcil veure que l'altre braç patirà la mateixa elongació en sentit contrari. A un angle de 45° , doncs, no detectarem cap diferència (com esperàvem! A fig. 1, veiem que el moviment d'aquest punt és perpendicular a l'eix radial). Tanmateix, com que les ones polaritzades \times es poden descriure amb les mateixes equacions i un canvi dels eixos precisament de 45° , per a aquestes ones tindriem una detecció corresponent a 0° , que és màxima. Això vol dir que qualsevol combinació lineal amb magnituds similars per a les dues polaritzacions serà detectada per tot θ .

També hem suposat que les ones provenien de l'eix vertical. Per la linealitat de l'aproximació, podem imaginar-nos l'efecte d'una ona en qualsevol altre direcció com la superposició dels efectes d'ones en cada un dels eixos. Sense tenir en compte la fase que hi hagi entre uns i altres, és clar que la deformació serà en plans perpendiculars al nostre i, per tant, només detectarem els efectes en el pla xy . Això implica que detectarem l'amplitud en un factor $\cos(\theta)$, perdent tota la visibilitat per ones que arribin perpendiculars a la vertical. Finalment, els càlculs de l'apartat anterior

han estat per a partícules en caiguda lliure. Com que els efectes que volem detectar estan en el pla xy , podem aproximar aquesta situació subjectant les components de l'interferòmetre només en l'eix z . Aquesta solució permet a més implementar un sistema de pèndols capaç d'atenuar les vibracions sísmiques de l'entorn [13].

El LIGO ha fet diverses observacions [14] des de la inicial el 14 de setembre de 2015 (publicada en [15]) utilitzant dos d'aquests interferòmetres per intentar extrapolat també l'origen de la senyal, si bé la proximitat dels observatoris respecte la velocitat de les ones fa que no es pugui tenir gaire precisió. La primera detecció, anomenada GW150914 i potser la més coneguda, es corresponia a la fusió de dos forats negres d'unes 30 masses solars a uns 410 Mpc de la terra (de l'ordre de magnitud de l'aproximació 4.4). La freqüència de les ones augmenta de 35 Hz a 250 Hz, com correspon a l'acceleració de l'òrbita en acostar-se els dos cossos, situant-lo en el rang de l'audició humana (fig. 4).

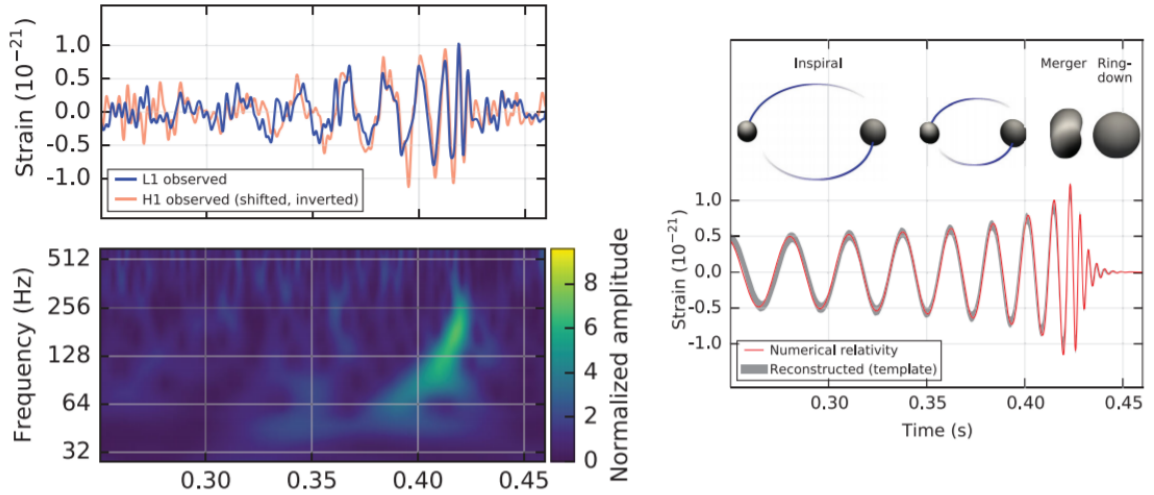


Figura 4: A l'esquerra, senyal detectada de l'esdeveniment GW150914: H1 la del detector de Hanford, Washington i L1 la del detector de Livingston, Luisiana. A la dreta, simulació de la senyal que s'espera d'un esdeveniment de fusió de dos forats negres òrbita, que també es representen. Les imatges són de [15].

La detecció d'ones no ha estat només un exercici per contrastar que aquesta predicció particular de la relativitat general és real, sinó que pot ajudar a corroborar hipòtesis aparentment tan allunyades com el comportament de la interacció electrofeble a altes energies [16]. Més habitualment, però, es parla de les ones gravitacionals com una nova manera de veure l'univers. La radiació de fons de microones ja ha ajudat a estudiar moltes propietats de l'univers, inclosos els models d'expansió predits per la solució de Friedmann-Robertson-Walker a les equacions d'Einstein. Segons el model cosmològic actual del Big Bang, una radiació de fons d'ones gravitacionals tindria informació anterior a l'emissió de la radiació de microones, i seria una finestra a esdeveniments cosmològics d'escala energètica que, de moment, resten inaccessibles.

Referències

- [1] Girbau, J.: *Detecció d'Ones Gravitatòries*, Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques, Vol. 31, num. 2, 2016.
- [2] Lorentz, H. A. (1915): *On Hamilton's principle in Einstein's theory of gravitation*, Proceedings of the Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences, 19: 751 – 765
- [3] Cerdà, J.: *Linear Functional Analysis*, American Mathematical Society, 2010.
- [4] O'Neill, B.: *Semi-Riemannian Geometry with applications to relativity*, Academic Press, New York, 1983.
- [5] Schutz, B.: *Geometrical methods of mathematical physics*, Cambridge University Press, 1980.
- [6] Carroll, S. M.: *Spacetime and Geometry, an Introduction to General Relativity*; Pearson, 2016.
- [7] R. J. Petti, *Derivation of Einstein-Cartan theory from general relativity*; <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1301/1301.1588.pdf>
- [8] Abraham, R., Marsden, J. E., Ratiu, T.: *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*; Springer-Verlag, Applied Mathematical Sciences 75, Second edition.
- [9] Dubrovin, B.A., Fomenko, A.T., Novikov S.P.: *Modern Geometry - Methods and Applications. Part I. The geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields.*; Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, Second Edition.
- [10] Brezis, H.: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*; Springer, Universitext.
- [11] Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A.; *Gravitation* (1973) Princeton University Press.
- [12] Taylor, J. H. and Weisberg, J. M.: *Astrophys. J.* 253, 908 (1982)
- [13] Robertson, N. A., et al.: *Quadruple suspension design for Advanced LIGO*; <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/19/15/311/pdf>
- [14] The LIGO Scientific Collaboration and The Virgo Collaboration: *A Gravitational-Wave Transient Catalog of Compact Binary Mergers Observed by LIGO and Virgo during the First and Second Observing Runs*; <https://www.ligo.org/detections/O1O2catalog/o2catalog-submitted.pdf>
- [15] B.P. Abbott et al. (LIGO Scientific Col. and Virgo Col.) *Phys. Rev. Lett.* 116, 061102 ; <https://journals.aps.org/prl/pdf/10.1103/PhysRevLett.116.061102>
- [16] Hashino, K., et al.: *Gravitational Waves from First Order Electroweak Phase Transition in Models with the $U(1)_X$ Gauge Symmetry*; <https://arxiv.org/pdf/1802.02947.pdf>